

# Una introducción a la dinámica de homeomorfismos de superficies vía la teoría de Brouwer

Andrés Navas

Universidad de Santiago de Chile

El objetivo de estas notas es presentar una introducción a la dinámica de los homeomorfismos en dimensión 2. Pese a que las demostraciones de los resultados de esta teoría tienen un contenido geométrico bastante claro, ellas son en general muy extensas y elaboradas. Es por ello que hemos preferido una presentación más bien informal, centrada en las ideas, y en la que muchos argumentos aparecen bosquejados en las numerosas figuras del texto, quedando algunas de las demostraciones a cargo del lector. Además, para simplificar la exposición, sólo consideraremos homeomorfismos que preservan orientación.

Comenzamos estas notas centrándonos en el trabajo de Brouwer sobre los homeomorfismos del plano sin puntos fijos. Luego abordamos la versión moderna (debida a Franks) del teorema de Poincaré-Birkhoff sobre la existencia de puntos fijos para ciertos homeomorfismos del anillo. Finalmente, estudiamos las diferentes nociones de “números de rotación” para homeomorfismos del toro desde los puntos de vista dinámico y medible. Un tópico que no abordaremos, en parte por estar muy bien desarrollado en las referencias clásicas [5] y [23], es el de la clasificación de Thurston de los homeomorfismos de superficies en homeomorfismos periódicos, reducibles y pseudo-Anosov. Señalemos sin embargo que los temas que nosotros tratamos no han sido desarrollados sistemáticamente en un texto guía, lo cual fue una de las motivaciones para la elaboración de estas notas. La otra motivación, inherente a la teoría en sí misma, dice relación con el rebrote que ésta ha cobrado en los últimos años, debido por una parte a los notables trabajos de Franks, Handel y Le Calvez, y por otro lado a sus posibles aplicaciones en una eventual solución de la renombrada “conjetura de Zimmer” para el caso bidimensional.

La lista de referencias dada al final de este texto dista muchísimo de ser exhaustiva. A ella podrían agregarse por ejemplo las notas de los cursos dictados con ocasión de la Escuela de verano 2006 del Instituto Fourier de Grenoble, las cuales están disponibles en internet ([www.fourier.ujf-grenoble.fr](http://www.fourier.ujf-grenoble.fr)). Esperamos que el lector interesado pueda utilizar todo este material como una “puerta de entrada” a la elegante teoría que pasamos a revisar.

# 1. El teorema de traslación de Brouwer: homeomorfismos libres del plano

A principios del siglo XX, Brouwer se interesó en los homeomorfismos del plano que son *libres*, es decir que *no poseen puntos fijos*. En particular, en 1909 creyó haber demostrado que dichos homeomorfismos son siempre topológicamente conjugados a traslaciones (no triviales). Sin embargo, el propio Brouwer percibió rápidamente un error en sus argumentos, y exhibió como contra-ejemplo a su “teorema” el homeomorfismo  $h$  esbozado en la figura 1. Observe que dicho homeomorfismo es el tiempo 1 de un flujo en el plano.

**Ejercicio 1.1.** Pruebe que  $h$  no es topológicamente conjugado a ninguna traslación del plano.

**Sugerencia.** Considere la transversal  $L$  indicada en la figura 1. Verifique que para todo  $n \in \mathbb{Z}$  se tiene  $h^n(L) \cap L \neq \emptyset$  y concluya lo afirmado.

**Ejercicio 1.2.** Dé un ejemplo de un homeomorfismo libre del plano que no sea el tiempo 1 de ningún flujo topológico.

Diremos que un abierto simplemente conexo  $D$  es un *dominio de traslación* de un homeomorfismo libre  $h$  si el borde de  $D$  lo componen dos rectas topológicas propiamente incrustadas y de la forma  $\ell$  y  $h(\ell)$ , de modo que  $\ell$  divide el plano en dos componentes conexas y para cada  $p \in D$  se tiene que  $p$  y  $h^{-1}(p)$  pertenecen a distintas componentes. Con esta terminología, el genuino “teorema de traslación de Brouwer” estipula que si  $h$  es un homeomorfismo libre del plano, entonces todo punto está contenido en algún dominio de traslación (vea la figura 2 para algunas ilustraciones).

**Ejercicio 1.3.** Suponga que  $h$  es un difeomorfismo libre del plano que es el tiempo 1 del flujo asociado a un campo de vectores sin singularidades. Usando el teorema de Poincaré-Bendixon, pruebe que cualquier curva integral  $\ell$  asociada a un campo ortogonal al campo original delimita junto con  $h(\ell)$  un dominio de traslación para  $h$ .

## 1.1. Un criterio para la existencia de puntos fijos

Consideremos la situación esbozada en la figura 3. En ella,  $\Omega$  es un disco topológico cerrado y  $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$  es un homeomorfismo. La región  $J$  es una de las componentes conexas de la intersección entre  $\Omega$  y  $f(\Omega)$ . Los segmentos de arco del tipo  $\alpha$  serán llamados *arcos de desborde*. A cada  $\alpha$  corresponde un arco  $\beta = \beta_\alpha$  contenido en  $\partial f(\Omega)$ , de modo que  $\alpha \cup \beta$  es el borde de un disco topológico  $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$ .

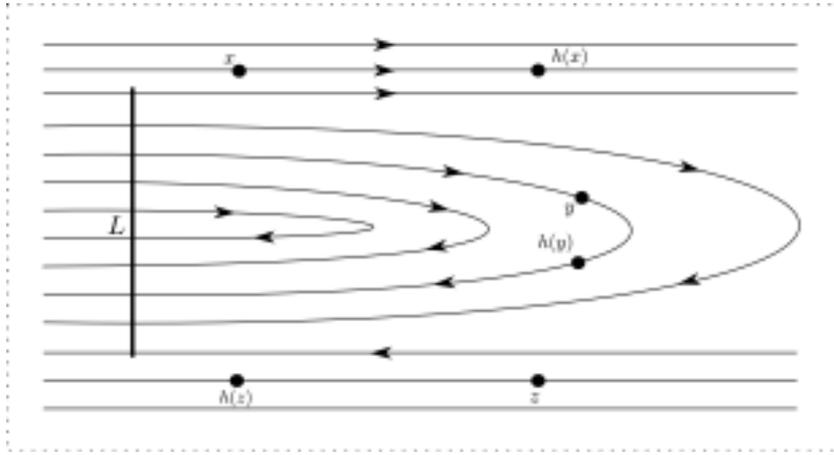


Figura 1: el homeomorfismo  $h$

**Proposición 1.4.** *Con las notaciones precedentes, si para todo arco de desborde  $\alpha$  se tiene  $f(\alpha) \not\subset \beta_\alpha$  y  $\beta_\alpha \not\subset f(\alpha)$ , entonces  $f$  posee al menos un punto fijo en  $J$ .*

**Demostración.** Para cada región  $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$  podemos escoger una retracción  $H^\Delta$  de  $\Delta$  sobre  $\alpha$ , es decir una aplicación continua  $H^\Delta : \Delta \rightarrow \alpha$  que restringida a  $\alpha$  sea la identidad. Observe por otro lado que las hipótesis de la proposición implican que si  $f(\alpha) \cap \beta_\alpha \neq \emptyset$ , entonces una de las situaciones ilustradas en la figura 4 ocurre. Por lo tanto, podemos escoger  $H^\Delta$  satisfaciendo la propiedad suplementaria de enviar cada componente de  $f(\alpha) \cap \beta$  sobre su punto de intersección con  $\alpha$ . Al “juntar” todas las aplicaciones  $H^\Delta$  obtenemos una aplicación continua  $H$  de  $f(J)$  en  $J$ , la cual viene formalmente definida por

$$H(x) = \begin{cases} H^\Delta(x) & \text{si } x \text{ pertenece a alguna región } \Delta = \Delta(\alpha, \beta), \\ x & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El teorema del punto fijo de Brouwer (vea [2] para una demostración elemental de este teorema) es por lo tanto válido para la aplicación  $H \circ f : J \rightarrow J$ . Sin embargo, se comprueba fácilmente que, dadas las hipótesis y la construcción de  $H$ , todo punto fijo de  $H \circ f$  es en realidad un punto fijo de  $f$ .  $\square$

Observe que las hipótesis  $f(\alpha) \not\subset \beta_\alpha$  y  $\beta_\alpha \not\subset f(\alpha)$  son necesarias para la validez de la proposición anterior, tal como lo muestran los ejemplos de la figura 5.

En algunas situaciones, para obtener resultados de multiplicidad de puntos fijos (*i.e.* existencia de al menos dos de tales puntos), será necesario hacer un estudio detallado del

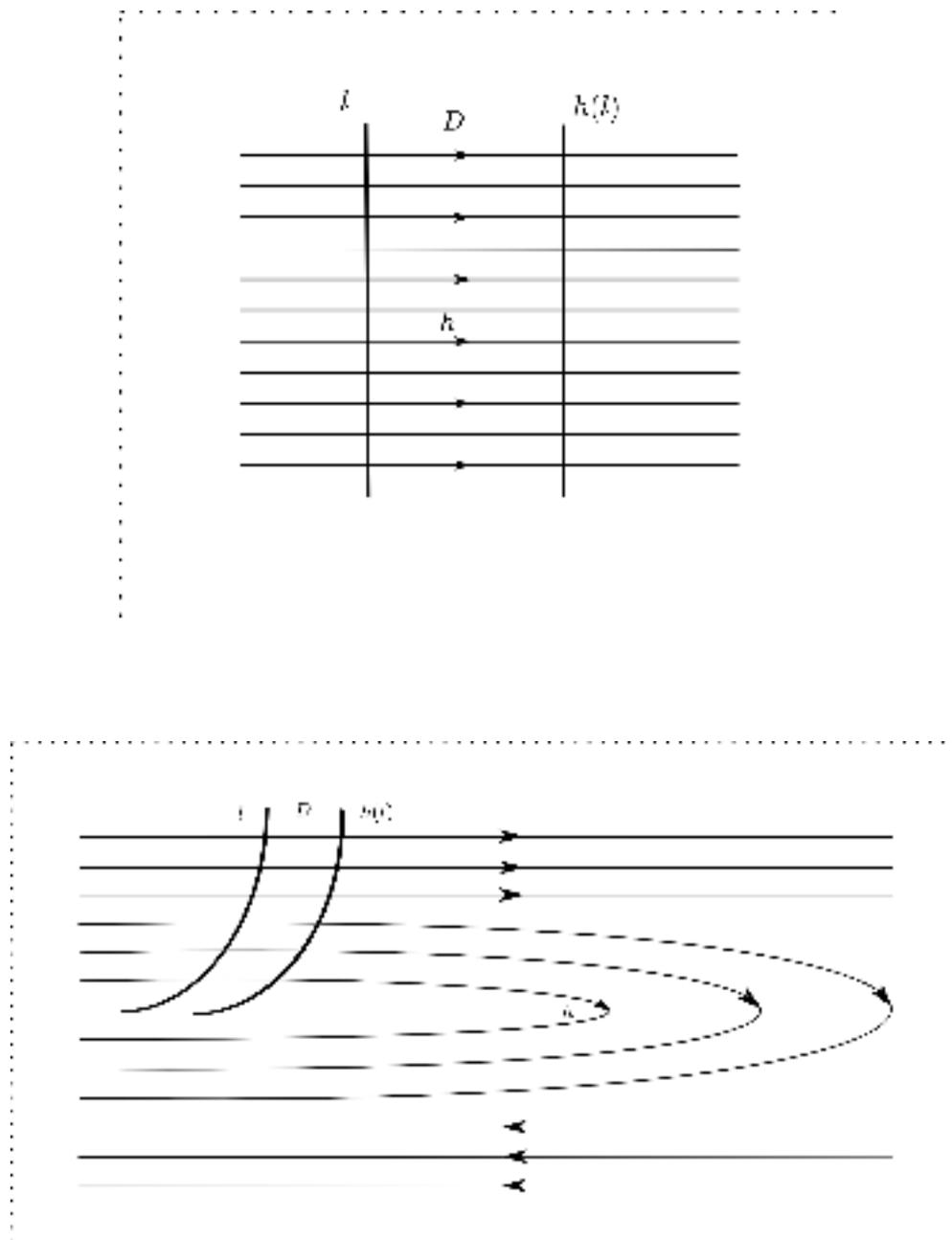


Figura 2: ejemplos de dominios de traslación

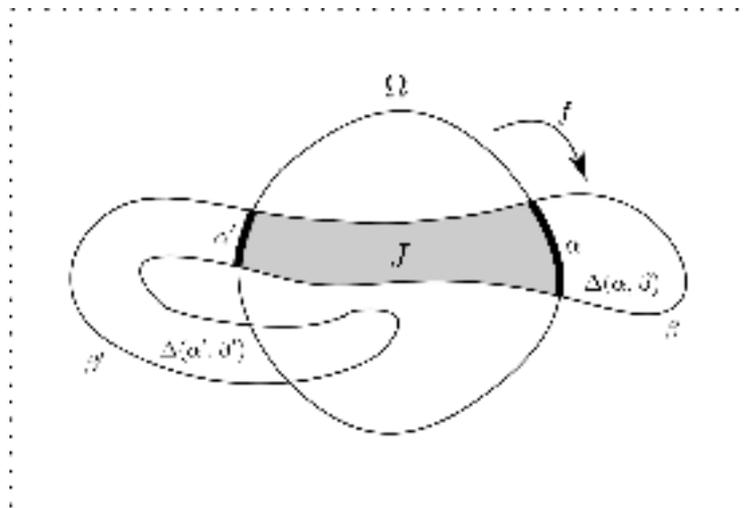


Figura 3: un criterio para hallar puntos fijos

*índice* de ellos. Para esto recordemos primeramente que si  $f$  es un homeomorfismo definido en un disco topológico cerrado de borde  $\gamma$  de modo que  $f$  no posee puntos fijos sobre  $\gamma$ , entonces tiene sentido considerar la aplicación de  $\gamma$  sobre  $S^1$  dada por

$$x \mapsto \frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|}.$$

Como  $\gamma$  es una curva cerrada simple, ella puede ser positivamente parametrizada por el círculo. Por lo tanto, la aplicación definida anteriormente induce una nueva aplicación (continua) del círculo sobre sí mismo. Definimos entonces el *índice*  $Ind(f, \gamma)$  de  $f$  a lo largo de  $\gamma$  como siendo el grado topológico de esta última aplicación (es decir, el número algebraico de vueltas sobre el círculo que recorre la imagen cuando la preimagen recorre exactamente una vuelta en el sentido positivo).

El índice es invariante bajo homotopías “que no pasan sobre puntos fijos”. De manera más precisa, para toda deformación continua  $\gamma_t$  de la curva original  $\gamma = \gamma_0$  satisfaciendo  $f(\gamma_t(s)) \neq \gamma_t(s)$  para todo  $s, t$  se cumple

$$Ind(f, \gamma) = Ind(f, \gamma_1).$$

A partir de lo anterior, el lector no debiese tener dificultad en verificar que si  $\Omega$  es un disco topológico cerrado y  $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$  satisface  $f(\Omega) \subset int(\Omega)$ , entonces  $Ind(f, \partial\Omega) = 1$ . Además, si  $f(\Omega) \subset \Omega$  y  $f$  no posee puntos fijos sobre  $\partial\Omega$ , entonces aún se tiene la igualdad  $Ind(f, \partial\Omega) = 1$ .

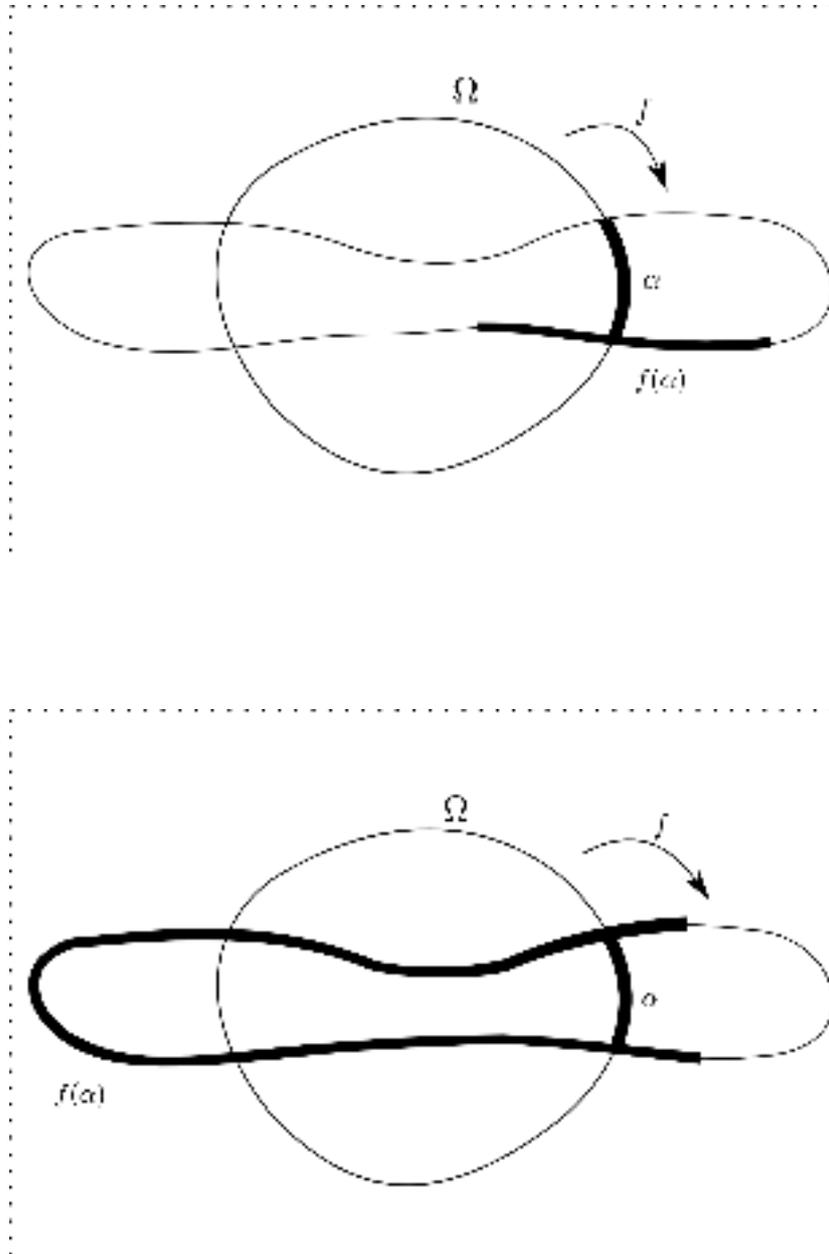


Figura 4: ilustración de las hipótesis de la proposición 1.4



**Proposición 1.5.** *Bajo las hipótesis de la proposición 1.4, si  $f$  no posee puntos fijos sobre  $\partial J$  entonces se verifica la igualdad  $\text{Ind}(f, \partial J) = 1$ .*

**Demostración.** Retomando la técnica de demostración de la proposición 1.4, reemplazamos cada retracción  $H^\Delta$  por una retracción por deformación sobre el complemento del conjunto de los puntos fijos de  $f$ . En tiempo 1 la imagen de  $\partial J$  queda contenida en  $\partial J$ , por lo que el índice correspondiente es igual a 1. La proposición se desprende entonces de la invariancia del índice bajo homotopías que no pasan sobre puntos fijos.  $\square$

Si  $x$  es un punto fijo aislado para un homeomorfismo  $f$  de una superficie, entonces podemos definir el índice de dicho punto como siendo el índice de  $f$  respecto a una curva cerrada simple positivamente orientada que delimite un disco topológico cerrado que contenga a  $x$  en su interior y no contenga otros puntos fijos de  $f$  (la invariancia por homotopía muestra que esta definición no depende de la curva elegida satisfaciendo las propiedades pedidas). Con esta terminología vale el importantísimo teorema del punto fijo de Lefschetz: si  $f$  es un homeomorfismo homotópico a la identidad de una superficie orientable compacta (posiblemente con borde) y  $f$  posee sólo un número finito de puntos fijos, entonces la suma de los índices de dichos puntos es igual a la característica de Euler de la superficie (vea por ejemplo [11]).

## 1.2. Teoría de trayectorias

Dado un homeomorfismo  $f$  del plano, decimos que una curva simple  $\gamma$  parametrizada por  $[0, 1]$  es un *arco de traslación* si  $\gamma(1) = f(\gamma(0))$  y  $\gamma \cap f(\gamma) \subset \{\gamma(0), \gamma(1)\}$ .

**Lema 1.6.** *Si  $h$  es un homeomorfismo libre del plano, entonces todo punto está contenido en el interior de algún arco de traslación de  $h$ .*

**Demostración.** Dado un punto  $a$  del plano podemos escoger  $r > 0$  suficientemente pequeño de modo que la bola cerrada  $B_r(a)$  no intersekte a su imagen por  $h$ . Considerando el supremo  $R > 0$  de tales radios  $r$  tenemos  $B_R(a) \cap h(B_R(a)) = \partial B_R(a) \cap h(\partial B_R(a)) \neq \emptyset$ . Escojamos un punto  $p'$  en esta intersección, y denotemos por  $p$  su preimagen por  $h$ . Como  $h$  no admite punto fijos se tiene  $p \neq p'$ . Pueden ocurrir entonces sólo dos situaciones (a saber  $h(p') \neq p$  o bien  $h(p') = p$ ), las que son ilustradas en la figura 6. Si trazamos una curva simple  $\gamma$  desde  $p$  a  $p'$  pasando por  $a$  y contenida en  $B_R(a)$ , vemos que en la primera situación se tiene  $\gamma \cap h(\gamma) = \{\gamma(1)\}$ , mientras que en la segunda se cumple  $\gamma \cap h(\gamma) = \{\gamma(0), \gamma(1)\}$ .  $\square$

El lector perspicaz habrá notado alguna dificultad para construir un arco de traslación como en la segunda de las situaciones esbozadas anteriormente. De hecho, una consecuencia

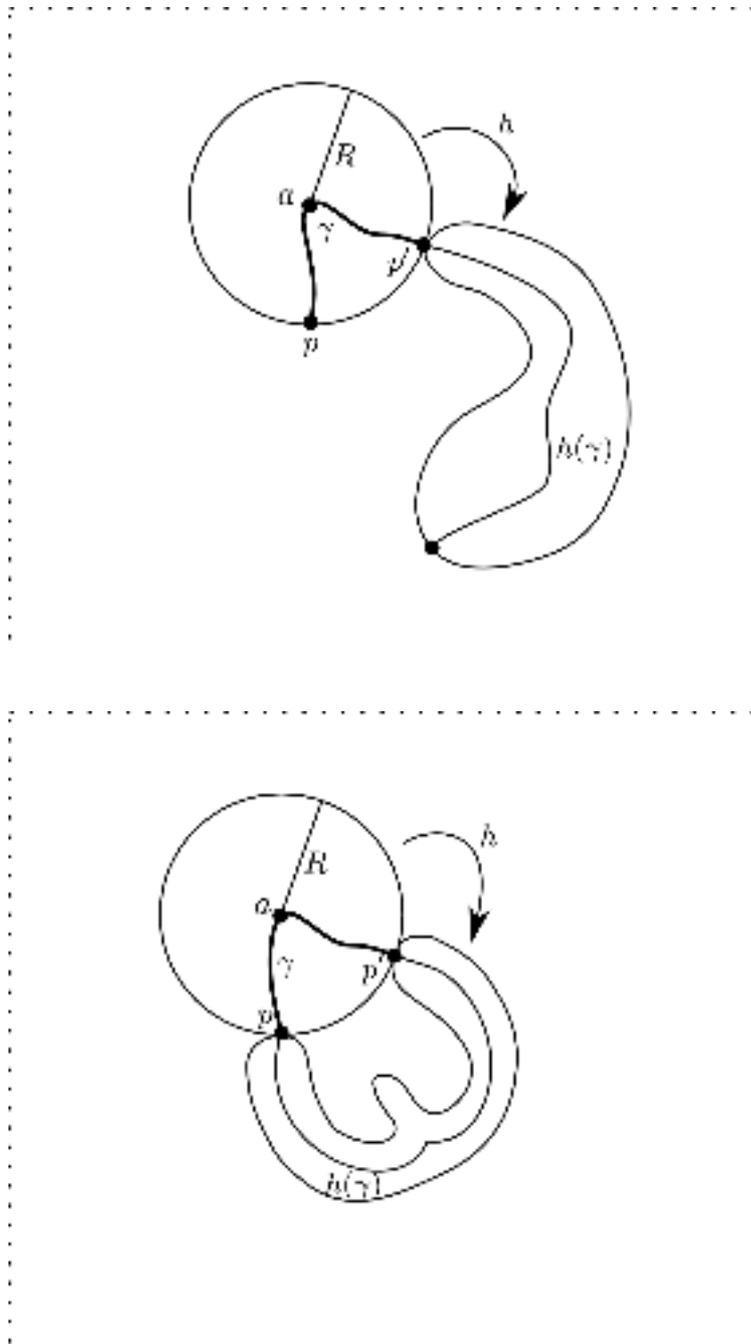


Figura 6: existencia de arcos de traslación

de lo que veremos a continuación es que esto es imposible (para homeomorfismos sin puntos fijos).

Dado un arco de traslación  $\gamma$  para un homeomorfismo  $f$ , definimos la *trayectoria*  $\ell(\gamma)$  de  $\gamma$  como siendo la reunión de todos los arcos  $f^n(\gamma)$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ . Como el arco original  $\gamma$  está parametrizado por el intervalo  $[0, 1]$ , la curva  $\ell(\gamma)$  puede ser parametrizada de manera natural haciendo  $\ell(\gamma)(t) = f^n(\gamma(t))$  para  $t \in [n, n + 1[$ .

**Proposición 1.7.** *Si  $h$  es un homeomorfismo sin puntos fijos del plano entonces ninguna trayectoria asociada a  $h$  posee puntos dobles. De manera más precisa, si  $\gamma$  es un arco de traslación entonces para todo  $s \neq t$  se tiene  $\ell(\gamma)(s) \neq \ell(\gamma)(t)$ .*

**Demostración.** Supongamos lo contrario y fijemos un arco de traslación  $\gamma$  cuya trayectoria  $\ell(\gamma)$  posea puntos dobles. Consideremos el menor real  $t \geq 1$  para el cual se tenga  $\ell(\gamma)(t) = \gamma(s)$  para algún  $s \in [0, 1[$ . El segmento de  $\ell(\gamma)$  entre  $\gamma(s)$  y  $\ell(\gamma)(t)$  delimita un disco topológico  $\Omega$ . No es difícil verificar que esta región verifica las hipótesis de la proposición 1.4 respecto a la aplicación  $h$  (vea la figura 7). Concluimos entonces la existencia de al menos un punto fijo para  $h$ , lo cual es contrario a nuestra hipótesis.  $\square$

Una consecuencia interesante (y no trivial) de lo que precede es que todo homeomorfismo sin puntos fijos del plano carece también de puntos periódicos.

**Ejercicio 1.8.** Un conjunto  $X$  es dicho *libre* para un homeomorfismo  $f$  si  $X \cap f(X) = \emptyset$ . Pruebe que si  $h$  es un homeomorfismo sin puntos fijos del plano y  $U$  es un disco topológico libre para  $h$ , entonces los discos topológicos  $U, h(U), h^2(U), \dots$  son dos a dos disjuntos y no se acumulan sobre ningún punto del plano.

**Sugerencia.** Suponga lo contrario y construya un arco de traslación para  $h$  cuya trayectoria posea puntos dobles.

**Ejercicio 1.9.** Sea  $\mu$  una medida de probabilidad sobre la esfera  $S^2$  que no está soportada en un único punto. Pruebe que si  $f$  es un homeomorfismo de  $S^2$  que preserva  $\mu$ , entonces  $f$  posee al menos dos puntos fijos.

**Sugerencia.** Proceda por contradicción y combine el resultado del ejercicio anterior con (la versión topológica para) el teorema de recurrencia de Poincaré [17].

Observe que la demostración de la proposición 1.7 se obtuvo sobre la base de la proposición 1.4. Si en lugar de esta última empleamos la proposición 1.5, es posible verificar la validez de lo siguiente.

**Proposición 1.10.** *Sea  $h$  un homeomorfismo del plano. Si  $h$  admite un punto periódico no fijo, entonces existe una curva cerrada simple en torno a la cual el índice de  $h$  es igual a 1.*

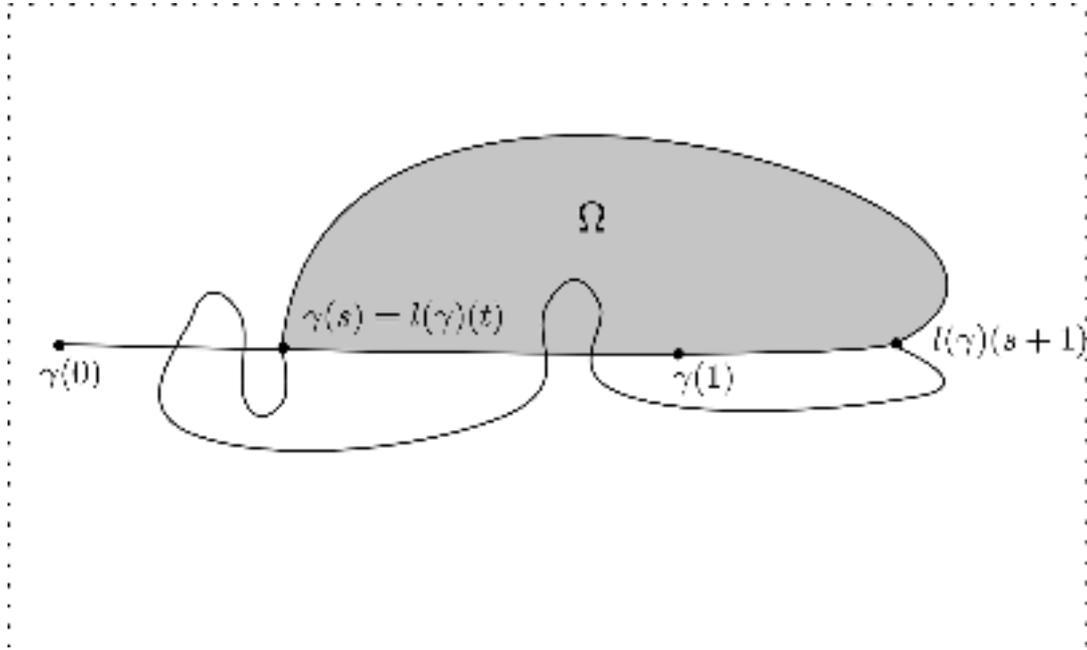


Figura 7: ilustración de la proposición 1.7 para  $n = 3$

**Ejercicio 1.11.** Sea  $\gamma$  un arco de traslación para un homeomorfismo libre  $h$  del plano. Denotemos  $p = \gamma(0)$ , y consideremos un segmento  $\lambda$  de la trayectoria asociada a  $\gamma$  comenzando en  $p$  y tal que  $h(p)$  está en el interior de  $\lambda$ . Usando la proposición 1.4 pruebe que, si  $\lambda'$  es una curva simple tal que  $\lambda \cup \lambda'$  delimita un disco topológico cerrado, entonces  $h(\lambda') \cap \lambda' \neq \emptyset$ .

**Ejercicio 1.12.** Sean  $h$  un homeomorfismo del plano y  $\Omega_1, \Omega_2$  dos discos topológicos libres y cerrados. Usando el resultado del ejercicio anterior, pruebe que el conjunto

$$I_h(\Omega_1, \Omega_2) = \{n \in \mathbb{Z} : h^n(\Omega_1) \cap \Omega_2 \neq \emptyset\}$$

es un intervalo de  $\mathbb{Z}$  (*i.e.* está formado de enteros consecutivos.)

**Ejercicio 1.13.** Usando el ejercicio anterior pruebe el siguiente teorema (debido a Le Roux [20]): si  $h$  es un homeomorfismo libre del plano y  $X$  es un subconjunto compacto y conexo, entonces el conjunto

$$I_h(X) = \{n \in \mathbb{Z} : h^n(X) \cap X \neq \emptyset\}$$

es finito o bien coincide con todo  $\mathbb{Z}$ . Dé ejemplos ilustrando ambas posibilidades.

### 1.3. Existencia de dominios de traslación

Abordamos a continuación la etapa final de la demostración del teorema de traslación de Brouwer para establecer la existencia de dominios de traslación. De entre las estrategias “modernas” para tal efecto pueden ser destacadas aquella de Franks [10], la de Guillou [12], y muy especialmente la de Sauzet y Le Calvez [16]. Nosotros seguiremos un desenvolvimiento ulterior (debido esencialmente a Le Calvez) de esta última técnica, la cual se ha revelado muy fructífera para la obtención de versiones foleadas y equivariantes del teorema [13, 14]. Una herramienta fundamental para esto (así como para los resultados de la próxima sección) consiste en una versión “robusta” de la afirmación del ejercicio 1.8. Para enunciarla, dado  $n \geq 2$  diremos que una sucesión finita  $\{U_1, \dots, U_n\}$  de discos topológicos abiertos es una *cadena de discos* asociada a un homeomorfismo  $F$  si se cumplen las siguientes condiciones:

- para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  existe  $m_i \in \mathbb{N}$  de modo que  $F^{m_i}(U_i) \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ ,
- $F(U_i) \cap U_i = \emptyset$  para todo  $U_i$ ,
- para  $i \neq j$  los discos  $U_i$  y  $U_j$  coinciden o bien son disjuntos.

En el caso en que además se tenga  $U_n = U_1$  diremos que  $\{U_1, \dots, U_n\}$  es una *cadena periódica de discos*.

La proposición fundamental siguiente es debida a Franks [8].

**Proposición 1.14.** *Sea  $F$  un homeomorfismo del plano cuyos puntos fijos son todos aislados. Si  $F$  admite una cadena periódica de discos, entonces existe una curva cerrada simple en torno a la cual el índice de  $F$  es igual a 1.*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los discos

$$U_1, F(U_1), \dots, F^{m_1-1}(U_1), U_2, F(U_2), \dots, F^{m_2-1}(U_2), \dots, U_{n-1}, F(U_{n-1}), \dots, F^{m_{n-1}-1}(U_{n-1})$$

son dos a dos disjuntos (en caso contrario podríamos formar una cadena periódica de longitud menor). Para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$  escojamos un punto  $y_i \in F^{m_{i-1}}(U_{i-1}) \cap U_i$ , hagamos  $x_{i-1} = F^{-m_i}(y_i) \in U_{i-1}$ , y definamos  $x_n = x_1$ . Escojamos además una homotopía  $H_t^i$  soportada en un disco cerrado contenido en  $U_i$  tal que  $H_1^i(y_i) = x_i$ . Juntando todas las  $H_t^i$  obtenemos una homotopía  $H_t$  soportada en la unión de los  $U_i$ ; en particular,  $H_t$  “no deforma” sobre los puntos fijos de  $F$ . Por otra parte, se verifica rápidamente que  $(H_1 \circ F)^{m_1+\dots+m_{n-1}}(x_1) = x_n = x_1$ . Por la proposición 1.10, la aplicación  $H_1 \circ F$  admite una curva cerrada simple en torno a la cual el índice es igual a 1. Por la invariancia del índice bajo homotopía, lo mismo ocurre para la aplicación original  $H_0 \circ F = F$ .  $\square$

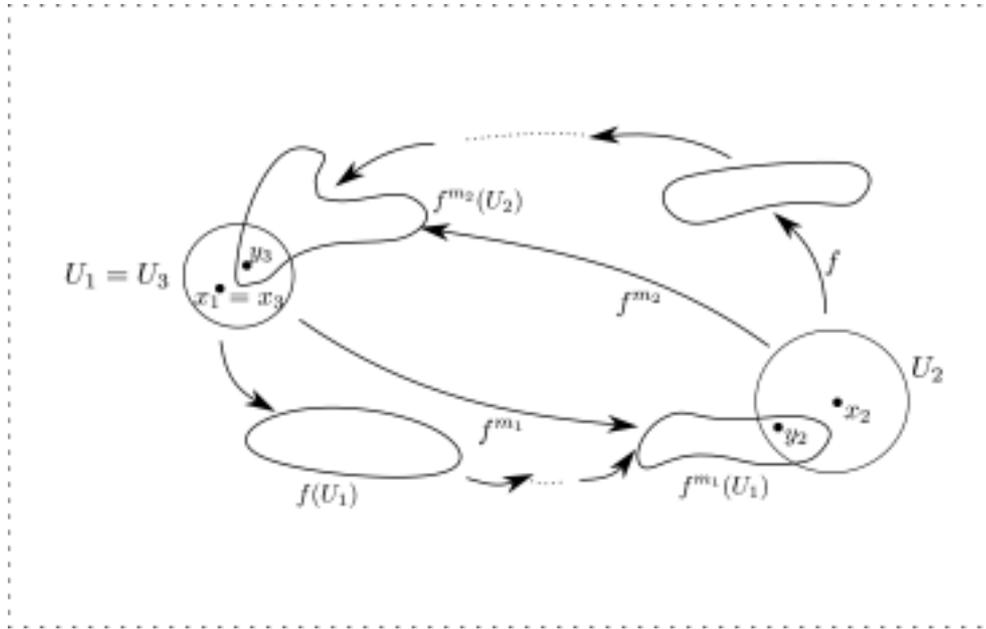


Figura 8: ilustración de la proposición 1.14

Si bien basta con la proposición precedente para demostrar (entre otras cosas) la existencia de dominios de traslación para homeomorfismos libres del plano, la siguiente lúcida observación (debida a Le Roux) permitirá simplificar notablemente la argumentación.

**Proposición 1.15.** *La proposición precedente continúa siendo válida si se consideran cadenas periódicas de discos cerrados en lugar de abiertos.*

**Demostración.** Al igual que en la demostración precedente, podemos suponer que los discos (cerrados)

$$U_1, F(U_1), \dots, F^{m_1-1}(U_1), U_2, F(U_2), \dots, F^{m_2-1}(U_2), \dots, U_{n-1}, F(U_{n-1}), \dots, F^{m_{n-1}-1}(U_{n-1})$$

son dos a dos disjuntos. Nuevamente, para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$  escojamos un punto  $y_i$  en  $F^{m_{i-1}}(U_{i-1}) \cap U_i$ , hagamos  $x_{i-1} = F^{-m_i}(y_i) \in U_{i-1}$ , y definamos  $x_n = x_1$ . Escojamos además una curva simple  $\gamma_i$  de extremidades  $x_i$  e  $y_i$  contenida (a excepción posible de sus extremos) en el interior de  $U_i$ .

Afirmamos en primer lugar que los puntos  $x_i$  son dos a dos distintos. En efecto, si se tuviese  $x_i = x_j$  entonces  $F^{m_j}(x_i) = F^{m_j}(x_j) \in F^{m_j}(U_i) \cap U_{j+1}$ , lo cual dada la “minimalidad” de la cadena de discos anteriormente enumerados implica que  $i = j$ .

Supongamos ahora que  $F^k(x_i) = x_j$  para algún par de puntos  $x_i, x_j$  (no necesariamente diferentes) y algún entero  $k \geq 1$ . En este caso se tiene  $F^{m_j+k}(x_i) = F^{m_j}(x_j) \in F^{m_j+k}(U_i) \cap U_{j+1}$ , lo cual nuevamente por minimalidad implica  $i = j$ . Luego,  $F$  admite un punto periódico, a saber  $x_i$  (observe que por hipótesis debe tenerse  $k \geq 2$ ). Finalmente, la (demostración de la) proposición 1.7 permite concluir la existencia de una curva cerrada simple en torno a la cual el índice de  $F$  es igual a 1.

Para completar la demostración basta observar que, si  $F^k(x_i) \neq x_j$  para todo  $x_i, x_j$  y todo  $k \geq 1$ , entonces considerando para cada curva  $\gamma_i$  un disco topológico abierto suficientemente pequeño  $U'_i$  que la contiene, las hipótesis de la proposición 1.14 son satisfechas para la cadena de discos abiertos  $U'_1, \dots, U'_n$ .  $\square$

Para utilizar el potencial de la proposición precedente nos valdremos de la noción de *descomposición en ladrillos* asociada a un homeomorfismo libre, la cual fue introducida por Flucher [6] y desarrollada principalmente por Sauzet [21]. Dado un abierto  $U$  del plano, un *enladrillado* (o descomposición en ladrillos) de  $U$  es una colección finita o numerable  $E = \{U_i : i \in \Lambda\}$  de discos topológicos cerrados tales que:

- la unión de los  $U_i$  es todo  $U$ ,
- para cada  $i \neq j$  el conjunto  $U_i \cap U_j$  es vacío o bien está contenido en  $\partial U_i \cap \partial U_j$ ,
- para cada  $x \in U$  el conjunto  $\Lambda(x) = \{i \in \Lambda : x \in U_i\}$  contiene a lo más tres índices, y  $\cup_{i \in \Lambda(x)} U_i$  es una vecindad de  $x$  en  $U$ .

Los *vértices* del enladrillado corresponden a los puntos para los cuales  $\Lambda(x)$  contiene exactamente tres índices, y las *aristas* a los segmentos de arco (cerrados) entre dos vértices (o desde un vértice hacia el infinito) que están contenidos en el borde de alguno de los ladrillos.

Si  $F$  es un homeomorfismo sin puntos fijos del plano, un enladrillado será dicho libre para  $F$  si cada uno de sus ladrillos es disjunto de su imagen por  $F$ . El enladrillado será dicho *maximal* si para todo par de ladrillos adyacentes (*i.e.* con una arista en común), la unión de ellos no es disjunta de su imagen.

Sea  $E = \{U_i : i \in \Lambda\}$  un enladrillado libre de  $\mathbb{R}^2$  para un homeomorfismo del plano sin puntos fijos  $F$ . Consideremos la aplicación  $S = S_F : \mathcal{P}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{P}(\Lambda)$  definida por

$$j \in S(C) \quad \text{si y sólo si existe } i \in C \quad \text{tal que } F(U_i) \cap U_j \neq \emptyset.$$

Si para  $C \subset \Lambda$  definimos  $C_+ = \cup_{n \geq 1} S^n(C)$ , entonces la proposición 1.15 implica que para todo  $i \in \Lambda$  se tiene  $i \notin \{i\}_+$ . Esto permite orientar naturalmente el *esqueleto* (*i.e.* la unión de las aristas) de  $E$ : si  $U_1$  y  $U_2$  tienen una arista en común  $\alpha$ , entonces se tiene  $F(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ ,

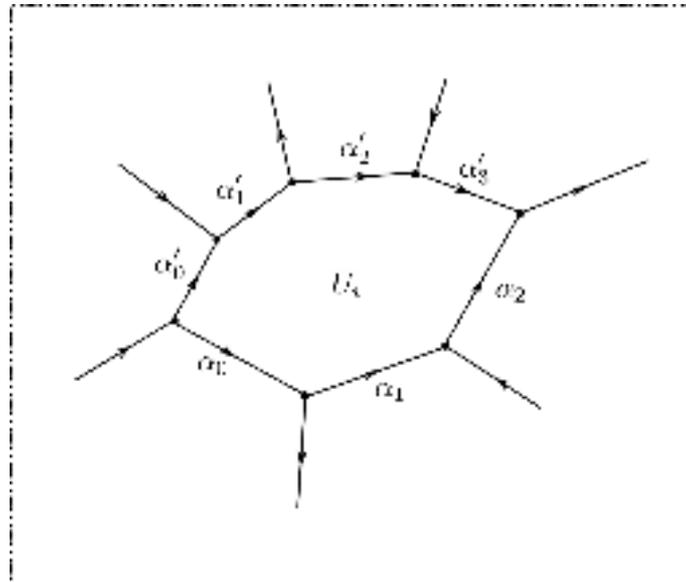


Figura 9: cada ladrillo posee (exactamente) una fuente y un pozo

o bien  $F(U_2) \cap U_1 \neq \emptyset$  (y no pueden tenerse ambas relaciones simultáneamente). En el primer (resp. segundo) caso orientamos  $\alpha$  de modo que  $U_1$  quede a izquierda (resp. a derecha) de  $\alpha$ . Si una sucesión (finita o infinita) de aristas contiguas se concatena siguiendo esta orientación diremos que ella es *admisibile*. No es difícil verificar entonces que el borde de cada ladrillo se descompone como unión de dos sucesiones admisibles, de modo que exactamente uno de los vértices es una “fuente” del ladrillo y otro un “pozo” del ladrillo (vea la figura 9). Además, desde cada vértice “sale” al menos una arista y “llega” al menos una (vea la figura 10).

Diremos que un subconjunto de  $C$  de  $\Lambda$  es *invariante* si  $S(C) \subset C$ . Si para cada  $C \subset \Lambda$  denotamos  $X_C = \bigcap_{i \in C} U_i$  la unión de los ladrillos cuyos índices están en  $C$ , la condición precedente equivale a  $F(X_C) \subset \text{int}(X_C)$ . Observe que si  $\alpha$  es una arista de  $\partial C$  entonces  $\alpha$  está orientada de modo que  $\text{int}(\mathbb{R}^2 \setminus X_C)$  está a su izquierda e  $\text{int}(X_C)$  a su derecha. En particular,  $\partial X_C$  es unión de curvas admisibles.

Ejemplos importantes de conjuntos invariantes son aquéllos de la forma  $\{i\}_+$  (donde  $i \in \Lambda$ ), los que además satisfacen el que el subconjunto  $X_{\{i\}_+}$  del plano que les viene asociado es conexo. Dadas las propiedades combinatorias de los enladrillados, esto implica que  $\partial X_{\{i\}_+}$  es una variedad topológica unidimensional, y como tal es por lo tanto equivalente a un círculo o a una recta. En el primer caso se comprueba rápidamente que dicha variedad encierra un disco topológico invariante por  $F$  o por  $F^{-1}$ . Sin embargo, esto implica (por el teorema del punto fijo de Brouwer) la existencia de un punto fijo para  $F$ , lo cual es contrario a nuestra

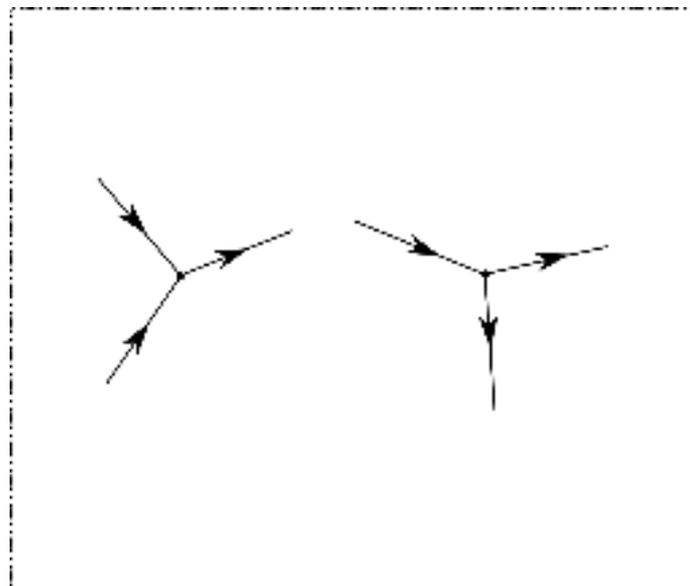


Figura 10: ningún vértice es un “atractor” o un “repulsor”

hipótesis. Se deduce entonces que  $\partial X_{\{i\}_+}$  es una recta topológica, y no es difícil convencerse que ella junto con su imagen por  $F$  delimitan un dominio de traslación.

A partir de la discusión anterior, para completar la demostración del teorema de traslación de Brouwer restaría entonces probar la existencia de enladrillados libres (y maximales) para homeomorfismos sin puntos fijos del plano. Dejaremos esto a cargo del lector, pues puede hacerse de manera constructiva y sin mayor dificultad. Observe finalmente que se puede escoger el enladrillado de modo que cualquier punto prescrito del plano quede contenido en el interior de uno de los ladrillos, lo cual permite probar que todo punto del plano está contenido en algún dominio de traslación.

## 2. El teorema de Poincaré-Birkhoff: homeomorfismos del anillo

Consideremos un homeomorfismo  $f$  del anillo (cerrado)  $A = S^1 \times [0, 1]$ . El recubrimiento universal  $\tilde{A}$  se identifica con la franja infinita  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , y  $f$  se levanta en homeomorfismos de  $\tilde{A}$  que preservan las rectas inferior y superior de la franja y que difieren entre sí por traslaciones horizontales de amplitud entera. Se dice que  $f$  satisface la *condición de torsión* si al menos uno de esos levantamientos  $F$  puede ser escogido de modo que los homeomorfismos  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  de la recta definidos por las igualdades  $F(t, 0) = (\varphi_0(t), 0)$  y  $F(t, 1) = (\varphi_1(t), 1)$  satisfagan ya sea  $\varphi_0(t) < t < \varphi_1(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , o bien  $\varphi_0(t) > t > \varphi_1(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 2.1.** Dada una curva cerrada simple regular y convexa  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  (donde  $s \in S^1$ ), consideremos el homeomorfismo  $f$  de  $S^1 \times [0, \pi]$  correspondiente a la dinámica de un *billar* en la región delimitada por  $\gamma$ . De manera más precisa, para cada  $(\theta, s)$  consideremos la semirecta partiendo desde  $\gamma(s)$  y formando un ángulo  $\theta$  desde la tangente a la curva en el punto  $\gamma(s)$ . Dicha recta intersecta nuevamente a la curva en un punto  $\gamma(\bar{s})$ , y lo hace formando un ángulo  $\bar{\theta}$  respecto a la tangente en  $\gamma(\bar{s})$ . Definimos entonces  $f(s, \theta) = (\bar{s}, \bar{\theta})$ . Observe que  $f(s, 0) = (s, 0)$  y  $f(s, \pi) = (s, \pi)$  para todo  $s \in S^1$  (pues al comenzar con ángulo nulo o total la “bola de billar” está obligada a permanecer en su lugar). Sin embargo, si fijamos el levantamiento  $F$  a  $\mathbb{R} \times [0, \pi]$  tal que  $F((t, 0)) = (t, 0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces se verifica  $F((t, \pi)) = (t + 1, \pi)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  (pues al recorrer el ángulo  $\theta$  de 0 a  $\pi$  en un punto dado de  $\gamma$  se recorre toda la curva). Si definimos  $T((t, \theta)) = (t - 1, \theta)$ , vemos que la aplicación  $T \circ F^2$  es un levantamiento de la iteración doble  $f^2$  satisfaciendo

$$T \circ F^2((t, 0)) = (t - 1, 0) \quad \text{y} \quad T \circ F^2((t, \pi)) = (t + 1, \pi).$$

En particular,  $f^2$  verifica la condición de torsión.

Un hecho relevante respecto a la transformación  $f$  es el que preserve la forma de volumen  $\sin(\theta) ds d\theta$ . Para verificar esto observe que, si definimos los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\bar{\beta}$  por

$$\tan(\alpha) = \frac{y(s) - y(\bar{s})}{x(s) - x(\bar{s})}, \quad \tan(\beta) = \frac{y'(s)}{x'(s)} \quad \text{y} \quad \tan(\bar{\beta}) = \frac{y'(\bar{s})}{x'(\bar{s})},$$

entonces

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left( \frac{y(\bar{s}) - y(s)}{x(\bar{s}) - x(s)} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{y'(s)}{x'(s)} \right) = L(s, \bar{s}), \\ \bar{\theta} &= \tan^{-1} \left( \frac{y'(\bar{s})}{x'(\bar{s})} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{y(\bar{s}) - y(s)}{x(\bar{s}) - x(s)} \right) = M(s, \bar{s}). \end{aligned}$$

A partir de estas igualdades concluimos que

$$d\theta = L_s ds + L_{\bar{s}} d\bar{s}, \quad d\bar{\theta} = M_s ds + M_{\bar{s}} d\bar{s},$$

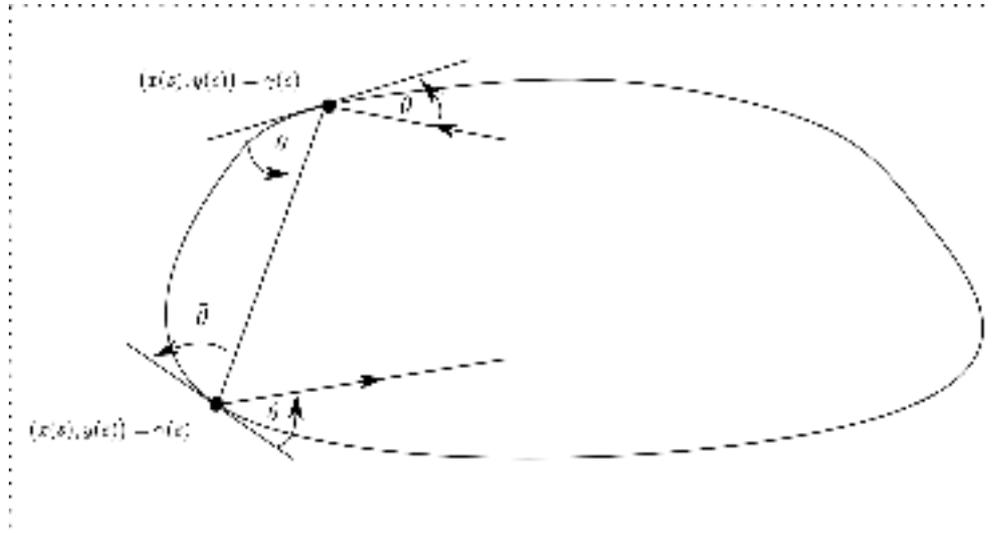


Figura 11: un billar...

es decir

$$d\bar{s} = \frac{d\theta}{L_{\bar{s}}} - \frac{L_s}{L_{\bar{s}}} ds,$$

$$d\bar{\theta} = \left[ M_s - \frac{M_{\bar{s}}L_s}{L_{\bar{s}}} \right] ds + \frac{M_{\bar{s}}}{L_{\bar{s}}} d\theta.$$

Luego, si denotamos por  $Jac$  el jacobiano de la transformación  $f$ , entonces

$$Jac = \begin{vmatrix} -L_s/L_{\bar{s}} & 1/L_{\bar{s}} \\ M_s - M_{\bar{s}}L_s/L_{\bar{s}} & M_{\bar{s}}/L_{\bar{s}} \end{vmatrix} = -\frac{M_s}{L_{\bar{s}}}.$$

Mediante un cálculo rutinario se verifica que

$$-\frac{M_s}{L_{\bar{s}}} = \frac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\text{sen}(\bar{\beta} - \alpha)}.$$

Por lo tanto,  $Jac = \text{sen}(\theta)/\text{sen}(\bar{\theta})$ , lo cual muestra la invariancia de la densidad  $\text{sen}(\theta) d\theta ds$ .

**Ejemplo 2.2.** Un célebre teorema debido a Birkhoff estipula que toda superficie difeomorfa a la esfera admite al menos una geodésica cerrada simple<sup>1</sup> (vea [22] para una presentación

---

<sup>1</sup>Este teorema fue posteriormente extendido por Ljusternik y Schnirelman, quienes probaron la existencia de al menos tres geodésicas cerradas simples. Este último resultado es optimal, como se comprueba fácilmente para un elipsoide con excentricidades principales dos a dos distintas.

concisa de este teorema). Ahora bien, fijada una geodésica cerrada simple  $\gamma$  parametrizada por  $S^1$ , podemos considerar la aplicación que a cada  $s \in S^1$  y a cada ángulo  $\theta \in ]0, \pi[$  asocia el segundo punto de intersección con  $\gamma$  de la geodésica que nace de  $\gamma(s)$  formando un ángulo  $\theta$  contra  $\gamma$ . Esta aplicación queda bien definida cuando la curvatura de la superficie es positiva, y se extiende de manera continua a  $[0, \pi] \times S^1$  (vea [4]). Es fácil ver que la aplicación resultante satisface la propiedad de torsión; además, de manera análoga al ejemplo anterior, la forma de volumen  $\sin(\theta) d\theta ds$  es preservada.

Motivado entre otros por los ejemplos precedentes, Poincaré se interesó en el estudio de los homeomorfismos del anillo satisfaciendo la condición de torsión y preservando una forma de área. Su resultado más notable en este ámbito, a saber la existencia de al menos un punto fijo para tales homeomorfismos, fue mejorado años más tarde por Birkhoff, quien demostró la existencia de al menos dos puntos fijos, tal como había sido conjeturado por el propio Poincaré. Notemos que este último resultado es optimal, como lo ilustra el ejemplo presentado a continuación.

**Ejemplo 2.3.** Dada una función de Morse sobre la esfera con cuatro puntos críticos, considere el campo gradiente  $X$  y luego el campo hamiltoniano  $Y$  asociado a ella (vea la figura 12). Haciendo “explotar” los puntos en que dicha función asume un máximo local, obtenemos un campo (conservativo) sobre el anillo cerrado  $A$ . El tiempo 1 del flujo asociado a este campo admite exactamente dos puntos fijos, los que corresponden a los puntos de mínimo y de silla de la función de Morse original.

Existen diversas generalizaciones del teorema de Poincaré-Birkhoff. De entre ellas, una de las más notables fue obtenida por Franks [8], quien reemplazó la hipótesis de invariancia de área por una de no errancia. Recordemos que un punto  $a$  es *no errante* para una transformación  $f$  si para toda vecindad  $V$  de  $a$  existe  $n > 0$  tal que  $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$ . Si  $f$  es un homeomorfismo que preserva una medida finita que es no nula sobre todo abierto no vacío, entonces todos los puntos son no errantes para  $f$ . En efecto, si para algún abierto  $V$  se tuviese  $f^n(V) \cap V = \emptyset$  para todo  $n > 0$ , entonces los abiertos  $V, f(V), f^2(V), \dots$  serían dos a dos disjuntos. Sin embargo, ellos tendrían la misma medida (positiva), contradiciendo el hecho que la medida total del espacio es finita.

Franks también consideró homeomorfismos del anillo abierto  $A_0 = S^1 \times ]0, 1[$  satisfaciendo una condición de torsión ligeramente más débil que la de Poincaré y Birkhoff. Para definirla, fijemos un homeomorfismo  $f$  de  $A_0$ , así como un levantamiento  $F$  de  $f$  a la franja (abierto) infinita  $\tilde{A}_0$ . Decimos que un disco topológico abierto  $U_0 \subset A_0$  y libre para  $f$  es *positivamente recurrente para  $F$*  (resp. *negativamente recurrente para  $F$* ) si existen  $n > 0$  y  $k > 0$  tales que para todo levantamiento  $U$  de  $U_0$  se tiene  $F^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$  (resp.  $F^n(U) \cap (U - k) \neq \emptyset$ ),

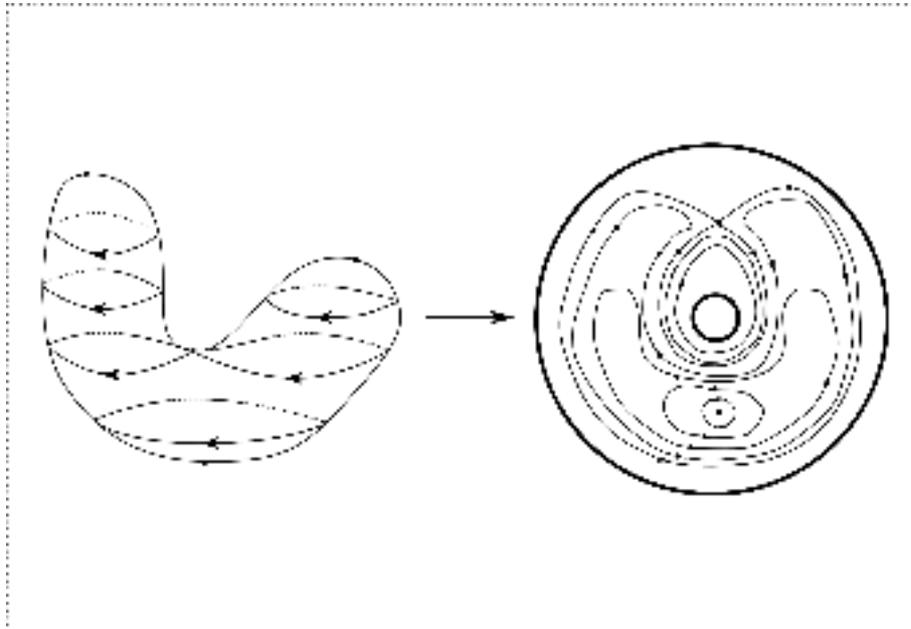


Figura 12: ilustración del ejemplo 2.3

donde

$$U + k = \{(a + k, b) : (a, b) \in U\}.$$

El teorema principal de Franks, a ser demostrado en la sección siguiente, puede ser enunciado de la siguiente forma.

**Teorema 2.4.** *Sea  $f$  un homeomorfismo del anillo abierto cuyos puntos fijos son aislados y para el cual todo punto es no errante. Si  $f$  posee un levantamiento que admite simultáneamente al menos un disco positivamente recurrente y otro negativamente recurrente, entonces  $f$  tiene al menos un punto fijo de índice positivo.*

A partir del teorema anterior puede ser deducido rápidamente un resultado para homeomorfismos del anillo cerrado  $A$ .

**Teorema 2.5.** *Sea  $f$  un homeomorfismo del anillo cerrado para el cual todo punto es no errante. Si  $f$  satisface la condición de torsión, entonces  $f$  tiene al menos dos puntos fijos.*

**Demostración.** Supongamos en lo que sigue que  $f$  posea sólo un número finito de puntos fijos, y sea  $F$  el levantamiento de  $f$  garantizado por la condición de torsión. Consideremos

el caso en que  $\varphi_1(t) < t < \varphi_0(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  (el otro caso es análogo). Fijemos un punto  $x = (s, 0) \in \tilde{A}$  cuya proyección en  $A$  sea recurrente para  $f$ . Si  $U \subset A$  es un disco cerrado suficientemente pequeño y conteniendo a  $x$  en su interior (relativo a  $\tilde{A}$ ), entonces  $F(U) \cap U = \emptyset$  y  $F^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$  para ciertos enteros positivos  $n$  y  $k$ . El interior de  $U$  es por lo tanto un disco positivamente recurrente para la restricción de  $F$  a  $\tilde{A}_0$ . Considerando un punto recurrente para  $f$  que sea la proyección de un punto de la forma  $(s, 1)$ , y mediante un argumento análogo al que precede, se prueba la existencia de discos negativamente recurrentes para la restricción de  $F$  a  $\tilde{A}_0$ . Por el teorema 2.4, la restricción de  $f$  a  $A_0$  debe poseer al menos un punto fijo de índice positivo. Por otra parte, siendo nula la característica de Euler del anillo (cerrado), el teorema del punto fijo de Lefschetz implica la existencia de al menos un punto fijo de índice negativo para  $f$ .  $\square$

**Ejercicio 2.6.** Usando lo anterior, pruebe que para toda curva cerrada simple regular y convexa existen al menos dos cuerdas al interior de la región  $\Omega$  delimitada por la curva que en los extremos son perpendiculares a las tangentes respectivas. Intente probar esto mediante argumentos geométricos elementales (considere por ejemplo la cuerda de mayor longitud posible en  $\Omega$ ).

## 2.1. Demostración del teorema

En esta sección daremos la prueba completa del teorema 2.4. Fijando un levantamiento  $F$  de  $f$  a  $\tilde{A}_0$  que admita tanto discos positivamente recurrentes como discos negativamente recurrentes, dividiremos la demostración en tres casos:

I. existe un disco abierto libre  $U_0$  contenido en  $A_0$  de modo que  $F^n(U) \cap U \neq \emptyset$  para algún  $n > 0$  y todo levantamiento  $U$  de  $U_0$ ;

II. existe un disco abierto libre  $U_0$  contenido en  $A_0$  de modo que, para ciertos  $n_1 > 0$ ,  $n_2 > 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ , y para todo levantamiento  $U$  de  $U_0$ ,

$$F^{n_1}(U) \cap (U + k_1) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad F^{n_2}(U) \cap (U - k_2) \neq \emptyset;$$

III. ninguno de los casos anteriores ocurre.

Para el caso I, haciendo  $U_1 = U_2 = U$  vemos que  $\{U_1, U_2\}$  es una cadena periódica de discos para  $F$ . En el caso II también existe una cadena periódica de discos para  $F$ , a saber

$$U, U + k_1, U + 2k_1, \dots, U + k_2k_1, U + k_2(k_1 - 1), \dots, U + k_2, U.$$

Como  $\tilde{A}_0$  es homeomorfo al plano, para los casos I y II la proposición 1.14 nos otorga la existencia de una curva cerrada simple en torno a la cual el índice de  $F$  es igual a 1. A partir

de esto no es difícil concluir la existencia de (al menos) una curva cerrada en  $A_0$  en torno a la cual el índice de  $f$  es positivo. En particular,  $f$  tiene al menos un punto fijo de índice positivo.

Dado lo anterior, para completar la demostración del teorema debemos verificar que el caso hipotético III no puede ocurrir. Para ello denotemos por  $R_+$  (resp.  $R_-$ ) al conjunto de los puntos de  $\tilde{A}_0$  contenidos en algún levantamiento de un disco positivamente recurrente (resp. negativamente recurrente). Por definición, tanto  $R_+$  como  $R_-$  son abiertos. Además, por la hipótesis de existencia de discos recurrentes para  $F$ , ambos son no vacíos. La estrategia consiste entonces en demostrar que  $R_+$  y  $R_-$  son disjuntos y que su unión es conexa.

Para demostrar que  $R_+ \cup R_-$  es conexo basta probar que dicha unión coincide con el complemento de la preimagen en  $\tilde{A}_0$  de los puntos fijos de  $f$ . Ahora bien, si  $x \in \tilde{A}_0$  se proyecta en un punto  $x_0$  que no es fijado por  $f$ , entonces podemos escoger un disco topológico abierto  $U_0$  en  $A_0$  conteniendo a  $x_0$  y que sea libre por  $f$ . Por hipótesis,  $x_0$  es no errante por  $f$ , por lo que existe  $n > 0$  tal que  $f^n(U_0) \cap U_0 \neq \emptyset$ . Obtenemos así un entero  $k$  tal que  $F^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$  para todo levantamiento  $U$  de  $U_0$ . Sin embargo, como  $U_0$  es libre por  $f$ , debe tenerse necesariamente  $k \neq 0$ , y por lo tanto  $x \in R_+ \cup R_-$ .

Resta probar que  $R_+$  y  $R_-$  son disjuntos. Supongamos lo contrario y fijemos un punto  $x \in \tilde{A}_0$  en su intersección. Por definición, existen discos topológicos libres y abiertos  $U_1$  y  $U_2$  en  $\tilde{A}_0$  conteniendo a  $x$ , así como enteros positivos  $n_1, n_2, k_1, k_2$ , tales que

$$F^{n_1}(U_1) \cap (U_1 + k_1) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad F^{n_2}(U_2) \cap (U_2 - k_2) \neq \emptyset.$$

Fijemos un disco topológico  $U$  contenido en  $U_1 \cap U_2$  y que contenga a  $x$  en su interior. Por la hipótesis de no errancia para los puntos de  $A_0$ , existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $k \in \mathbb{Z}$  tales que  $F^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$ . Veamos que esto es sin embargo imposible. En efecto, debe tenerse  $k \neq 0$ , pues estamos suponiendo que la hipótesis del caso I no se cumple. Por otro lado, si  $k$  fuese negativo entonces las relaciones

$$\emptyset \neq F^n(U) \cap (U + k) \subset F^n(U_1) \cap (U_1 + k),$$

$$\emptyset \neq F^{n_1}(U_1) \cap (U_1 + k_1),$$

violarían el hecho que el caso II no ocurre. Finalmente, la misma contradicción se obtiene en el caso  $k > 0$  al observar las relaciones

$$\emptyset \neq F^n(U) \cap (U + k) \subset F^n(U_2) \cap (U_2 + k),$$

$$\emptyset \neq F^{n_2}(U_2) \cap (U_2 - k_2).$$

La demostración queda así concluida.

**Ejercicio 2.7.** Dados un homeomorfismo  $f$  de  $A$  y un levantamiento  $F$  a la franja infinita, para cada  $x \in \tilde{A}$  definimos los *números de rotación*

$$\rho_-(x, F) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_1(F^n(x)) - \tau(x)}{n} \quad \text{y} \quad \rho_+(x, F) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_1(F^n(x)) - \tau(x)}{n},$$

donde  $\tau_1$  designa la proyección sobre la primera coordenada  $\tau_1((r, s)) = r$ . Pruebe que si existen puntos  $x \in \tilde{A}$  satisfaciendo  $\rho_+(x, F) > 0$  (resp.  $\rho_-(x, F) < 0$ ), entonces la restricción de  $F$  a  $\tilde{A}_0$  admite discos positivamente (resp. negativamente) recurrentes.

## 2.2. Homeomorfismos recurrentes por cadenas

Dados un homeomorfismo  $f$ , dos puntos  $x, y$  del espacio (métrico) subyacente, y  $\varepsilon > 0$ , una  $\varepsilon$ -cadena desde  $x$  a  $y$  es una sucesión finita de puntos  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  tal que  $x_1 = x$ ,  $x_{n+1} = y$ , y tal que para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  la distancia entre  $f(x_i)$  y  $x_{i+1}$  es menor que  $\varepsilon$ . Un punto  $x$  es *recurrente por cadenas* si para todo  $\varepsilon > 0$  existe una  $\varepsilon$ -cadena de  $x$  a  $x$ . Un conjunto invariante  $Y$  es *transitivo por cadenas* si para todo  $x, y$  en  $Y$  existe una  $\varepsilon$ -cadena de  $x$  a  $y$ .

**Ejercicio 2.8.** Sea  $Y$  un conjunto cerrado y conexo. Pruebe que si  $Y$  es invariante por un homeomorfismo  $f$  y todos sus puntos son recurrentes por cadenas, entonces  $Y$  es transitivo por cadenas.

El lector no debiese tener problemas en probar lo siguiente (use la proposición 1.14 o bien utilice el hecho que todo homeomorfismo del plano con puntos periódicos posee puntos fijos).

**Proposición 2.9.** *Sea  $f$  un homeomorfismo de una superficie (compacta) cuyo recubrimiento universal es homeomorfo al plano o a  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ . Si  $F$  es un levantamiento de  $f$  a dicho recubrimiento que admite un punto recurrente por cadenas, entonces  $F$  posee al menos un punto fijo.*

El teorema siguiente (debido a Franks [7]) puede ser visto como otra generalización del teorema de Poincaré-Birkhoff. Observe sin embargo que en la conclusión sólo se estipula la existencia de un punto fijo; ello se debe a que la condición de transitividad por cadenas es bastante más débil que la de no errancia (vea el ejercicio 2.11).

**Teorema 2.10.** *Sea  $f$  un homeomorfismo del disco cerrado para el cual todo punto es recurrente por cadenas. Si  $F$  es un levantamiento de  $f$  a la franja infinita  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , entonces una de las siguientes posibilidades ocurre:*

- (i)  $F$  posee un punto fijo;
- (ii) para todo  $x \in \mathbb{R} \times [0, 1]$  se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_1(F^n(x) - x) = \infty$ , siendo la convergencia uniforme en  $x$ ;
- (iii) para todo  $x \in \mathbb{R} \times [0, 1]$  se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_1(F^n(x) - x) = -\infty$ , siendo la convergencia uniforme en  $x$ .

**Demostración.** Observe que, por el ejercicio 2.8, el anillo completo es transitivo por cadenas para  $f$ . La idea de la demostración consiste en probar que, si (ii) y (iii) no ocurren, entonces  $F$  admite un punto recurrente por cadenas. En tal situación, la proposición 2.9 implicará que la condición (i) se verifica.

Caso I. Los desplazamientos de los iterados de  $F$  están acotados en una dirección. De manera más precisa, existe una constante positiva  $C$  tal que una de las siguientes condiciones se cumple:

- para todo  $x \in \mathbb{R} \times [0, 1]$  y todo  $n \geq 0$  se tiene  $\tau_1(F^n(x) - x) \geq -C$ ,
- para todo  $x \in \mathbb{R} \times [0, 1]$  y todo  $n \geq 0$  se tiene  $\tau_1(F^n(x) - x) \leq C$ .

Siendo ambas situaciones análogas, supongamos que la primera de ellas ocurra. En tal caso, si no se satisface la condición (ii) entonces existe un punto  $x$  para el cual  $\tau_1(F^n(x) - x)$  está acotado superiormente. Por lo tanto, la sucesión  $(F^n(x))$  posee puntos de acumulación, y tales puntos son recurrentes por cadenas para  $F$ . La proposición 2.9 implica así la validez de (i).

Caso II. La situación del caso I no ocurre.

Bajo esta hipótesis probaremos la existencia de un punto recurrente por cadenas para  $F$ . Para ello, fijemos  $\varepsilon > 0$ . Siendo  $A$  compacto y transitivo por cadenas para  $f$ , existe  $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que para todo par de puntos  $y_1, y_2$  en  $A$  existe una  $\varepsilon$ -cadena de  $y_1$  a  $y_2$  de largo inferior o igual a  $n$ . Si fijamos levantamientos  $x_1, x_2$  de esos puntos satisfaciendo  $|\tau_1(x_1 - x_2)| \leq 1$ , la cadena anteriormente citada se levantará en una  $\varepsilon$ -cadena entre  $x_1$  y un punto  $x'_2$  de la forma  $x_2 + (m, 0)$ , donde  $m \in \mathbb{Z}$  es tal que  $|m|$  está acotado por una constante  $M = M(\varepsilon)$ .

Como la situación del caso I no se da, haciendo  $C = 3M$  concluimos la existencia de puntos  $x_1, x_2$  de la franja infinita, así como de enteros positivos  $n_1, n_2$ , tales que

$$\tau_1(F^{n_1}(x_1) - x_1) \geq 3M \quad \text{y} \quad \tau_1(F^{n_2}(x_2) - x_2) \leq -3M.$$



Figura 13: un homeomorfismo del anillo con sólo un punto fijo

Fijemos otro punto arbitrario  $x$  de dicha franja. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$|\tau_1(x_1 - x_2)| \leq 1, \quad |\tau_1(x - x_1)| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\tau_1(x - x_2)| \leq 1.$$

Consideremos una  $\varepsilon$ -cadena de  $x$  hacia algún trasladado  $x'_1 = x_1 + (m', 0)$ , con  $|m'| \leq M$ . Concatenemos esta cadena con el segmento de la órbita por  $F$  del punto  $x'_1$  entre  $x'_1$  y  $F^{n_1}(x'_1)$ . Finalmente, concatenemos la cadena formada con una  $\varepsilon$ -cadena entre  $F^{n_1}(x'_1)$  y algún  $x' = x + (m, 0)$  satisfaciendo  $|\tau_1(F^{n_1}(x'_1) - x')| \leq M$ . Teniendo en cuenta que

$$\tau_1(F^{n_1}(x'_1) - x'_1) \geq 3M$$

se concluye rápidamente que  $m \geq M$ .

Hemos por lo tanto construido una  $\varepsilon$ -cadena para  $F$  entre  $x$  y algún punto  $x + (m, 0)$  satisfaciendo  $m \geq M$ . De manera análoga (valiéndonos de  $x_2$  en lugar de  $x_1$ ), podemos construir una  $\varepsilon$ -cadena entre  $x$  y un punto  $x - (\tilde{m}, 0)$  para algún  $\tilde{m} \geq M$ . Cada una de esas cadenas puede ser trasladada horizontalmente. Concatenando  $\tilde{m}$  cadenas del primer tipo con  $m$  cadenas del segundo concluimos que  $x$  es  $\varepsilon$ -recurrente por cadenas. Siendo esto verdad para todo  $\varepsilon > 0$ , la proposición 2.9 implica la existencia de un punto fijo para  $F$ .  $\square$

**Ejercicio 2.11.** Verifique que el homeomorfismo del anillo bosquejado en la figura 13 es transitivo por cadenas y admite sólo un punto fijo.

### 3. Vectores de traslación: homeomorfismos del toro

Uno de los conceptos fundamentales en la teoría clásica de homeomorfismos del círculo es el de *número de rotación*, el cual fue introducido por Poincaré. Recordemos que si  $f$  es un homeomorfismo de  $S^1$  entonces este número  $\rho(f)$  se define como (vea por ejemplo [19])

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} \pmod{1},$$

donde  $F$  es un levantamiento de  $f$  y  $x$  es cualquier punto de la recta. Esta definición es pertinente, en el sentido que el límite correspondiente siempre existe y es independiente de las elecciones de  $F$  y de  $x$ .

El número de rotación contiene información dinámica relevante. Por ejemplo,  $\rho(f)$  es racional si y sólo si  $f$  posee puntos periódicos, y en el caso en que  $\rho(f)$  es irracional el homeomorfismo  $f$  es semiconjugado a la rotación de ángulo  $\rho(f)$ . Por otra parte, si consideramos la función real  $\phi$  bien definida sobre el círculo por  $\phi(y) = F(x) - x$  (donde denotamos por  $y$  a un punto de  $S^1$  y por  $x$  a cualquiera de sus preimágenes en la recta), entonces para toda medida (de probabilidad) invariante  $\mu$  se verifica la igualdad

$$\rho(f) = \int_{S^1} \phi(y) d\mu(y) \pmod{1}. \tag{1}$$

Numerosos intentos han sido hechos para generalizar lo anterior al caso de homeomorfismos de superficies (principalmente para el toro). La primera dificultad consiste en hallar una buena definición de número de rotación, pues como veremos a continuación se pueden seguir varios caminos diferentes.

#### 3.1. Definición dinámica

Sean  $f$  un homeomorfismo del toro  $\mathbb{T}^2$  homotópico a la identidad y  $F$  un levantamiento de  $f$  a  $\mathbb{R}^2$ . Dado  $y \in \mathbb{T}^2$  definimos el *conjunto de rotación*  $\rho(F, y)$  de  $F$  en  $y$  como siendo el conjunto de los puntos de acumulación de la sucesión  $(F^n(x) - x)/n$ , donde  $x$  es una preimagen de  $y$  en el plano. El *conjunto de rotación puntual*  $\rho_p(F)$  es la unión de todos los  $\rho(F, y)$ , donde  $y \in \mathbb{T}^2$ . Reduciendo módulo  $\mathbb{Z}^2$  obtenemos finalmente el *conjunto de rotación puntual de  $f$* , al cual denotamos por  $\rho_p(f)$ .

La definición precedente, si bien es muy natural, resulta poco funcional. Una de las razones radica en que estamos considerando de manera separada cada punto del toro. Es por

ello que tiene sentido considerar el conjunto  $\rho(F)$  de todos los puntos límite para sucesiones de la forma  $(F^{n_i}(x_i) - x_i)/n_i$ , donde  $(n_i)$  es una sucesión estrictamente creciente de enteros y los  $x_i$  son puntos del plano (equivalentemente, de  $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ ). Dicho *conjunto de rotación* de  $F$  induce, módulo  $\mathbb{Z}^2$ , un conjunto de rotación  $\rho(f)$  para  $f$ , teniéndose de manera evidente las relaciones  $\rho_p(F) \subset \rho(F)$  y  $\rho_p(f) \subset \rho(f)$ .

Observe que si definimos los conjuntos

$$K_k(F) = \left\{ \frac{F^k(x) - x}{k} : x \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \frac{F^k(x) - x}{k} : x \in I^2 \right\},$$

entonces se tiene la relación

$$\rho(F) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{k \geq n} K_k(F)},$$

la cual muestra que  $\rho(F)$  (al igual que  $\rho(f)$ ) es un conjunto cerrado (y por lo tanto compacto). El siguiente resultado es debido a Misiurewicz y Ziemian [18].

**Teorema 3.1.** *Para todo homeomorfismo homotópico a la identidad  $f$  del toro  $\mathbb{T}^2$  y todo levantamiento  $F$  al plano, el conjunto de rotación  $\rho(F)$  es conexo y convexo.*

Observe que el enunciado del teorema contiene dos afirmaciones, siendo éstas de naturaleza diferente: la conexidad subsiste en dimensión arbitraria (con definiciones análogas de vectores de rotación), mientras que la convexidad es un fenómeno típico de la dimensión 2.

Para probar la conexidad procederemos por contradicción. Supongamos que para cierto  $\delta > 0$  existan abiertos disjuntos  $U$  y  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  a distancia  $\geq \delta$  entre ellos intersectando cada uno a  $\rho(F)$  y tales que su unión contenga a  $\rho(F)$ . Fijemos  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  de modo que para todo punto  $z$  y todo  $n \geq \bar{n}$  se tenga  $(F^n(z) - z)/n \in U \cup V$ . Escojamos  $u \in U \cap \rho(F)$  y  $v \in V \cap \rho(F)$  de modo que

$$u = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \quad \text{y} \quad v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{m_i}(x'_i) - x'_i}{m_i}.$$

Fijemos una constante  $M$  satisfaciendo  $\|F(z) - z\| \leq M$  para todo  $z$ . Si  $n > 2M/\delta$  entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F^{n+1}(z) - z}{n+1} - \frac{F^n(z) - z}{n} \right\| &\leq \left\| \frac{F^{n+1}(z) - z}{n+1} - \frac{F^{n+1}(z) - z}{n} \right\| + \left\| \frac{F^{n+1}(z) - z}{n} - \frac{F^n(z) - z}{n} \right\| \\ &\leq \|F^{n+1}(z) - z\| \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{M}{n} = \frac{1}{n} \left( \left\| \frac{F^{n+1}(z) - z}{n+1} \right\| + M \right) \leq \frac{2M}{n} < \delta. \end{aligned}$$

De esta desigualdad se deduce que para todo  $n, i$  suficientemente grandes se tiene que  $(F^n(x_i) - x_i)/n \in U$ . Análogamente, para todo  $n, i$  suficientemente grandes se cumple que

$(F^n(x'_i) - x'_i)/n \in V$ . Si fijamos un arco uniendo  $x_i$  e  $x'_i$ , entonces la imagen de dicho arco por la aplicación  $(F^n - Id)/n$  debe intersectar al complemento de  $U \cup V$ , lo cual es imposible para  $n \geq \bar{n}$ . La prueba de la conexidad de  $\rho(F)$  queda así concluida.

La demostración de la convexidad de  $\rho(f)$  es bastante más complicada. Comenzamos con un lema sencillo que nos ayudará a entender mejor la situación. Dado un subconjunto  $X$  del plano, denotamos su cierre convexo por  $\text{conv}(X)$ ; además, para  $\varepsilon > 0$  hacemos

$$B_\varepsilon(X) = \{y: \text{existe } x \in X \text{ tal que } \text{dist}(x, y) < \varepsilon\}.$$

**Lema 3.2.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene la inclusión  $\rho(F) \subset \text{conv}(K_n(F))$ .*

**Demostración.** De acuerdo al teorema de separación de Minkowsky, si la inclusión no fuese cierta entonces existiría un funcional lineal  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para algún  $v \in \rho(F)$ ,

$$\Phi(v) > \sup_{\text{conv}(K_n(F))} \Phi. \quad (2)$$

Observe sin embargo que

$$\Phi(F^k(z) - z) = \sum_{i=0}^{\ell-1} \Phi(F^{(i+1)n}(z) - F^{in}(z)) + \Phi(F^k(z) - F^{\ell n}(z)),$$

donde  $\ell = [k/n]$ . Por lo tanto, para cierta constante  $M$  independiente de  $k$  se tiene

$$\Phi\left(\frac{F^k(z) - z}{k}\right) \leq \frac{\ell n}{k} \sup_{K_n(F)} \Phi + \frac{M}{k},$$

por lo que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{K_k(F)} \Phi \right) \leq \sup_{K_n(F)} \Phi.$$

Esto implica que

$$\sup_{\rho(F)} \Phi \leq \sup_{K_n(F)} \Phi = \sup_{\text{conv}(K_n(F))} \Phi.$$

Sin embargo, esta última desigualdad está en contradicción con (2). □

Observe que (un análogo para) el lema anterior subsiste en dimensión arbitraria: es en lo que sigue donde la bidimensionalidad jugará un rol primordial. La primera afirmación de la proposición enunciada a continuación implica la convexidad de  $\rho(F)$ .

**Proposición 3.3.** *Para todo homeomorfismo  $f$  del toro homotópico a la identidad, y para todo levantamiento  $F$  al plano, se tiene la igualdad*

$$\rho(F) = \bigcap_{n \geq 1} \text{conv}(K_n(F)).$$

*Además, para cada  $v \in \rho(F)$  existe una sucesión de puntos  $x_n$  tal que  $(F^n(x_n) - x_n)/n$  converge a  $v$ .*

La demostración involucra un lema muy interesante sobre la dinámica de las traslaciones, el cual debiese ser comparado con el ejercicio 1.11 (dejamos su demostración a cargo del lector).

**Lema 3.4.** *Sea  $\gamma$  un arco simple entre dos puntos distintos  $a$  y  $b$  del plano que no intersecta al segmento de recta  $\overline{ab}$  que los une. Si  $h$  es una traslación de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\gamma$  y  $h(\gamma)$  son disjuntos, entonces  $h(a)$  no pertenece a la región delimitada por  $\gamma$  y  $\overline{ab}$ .*

Usando el lema precedente se deduce rápidamente lo siguiente.

**Lema 3.5.** *Para todo homeomorfismo  $f$  del toro homotópico a la identidad, y para todo levantamiento  $F$  de  $f$  al plano, se tiene la relación  $\text{conv}(F(I^2)) \subset B_{\sqrt{2}}(F(I^2))$ .*

**Demostración.** Si  $F(I^2)$  es convexo no hay nada que demostrar. En caso contrario, fijemos un punto  $c \in \text{conv}(F(I^2)) \setminus F(I^2)$  y consideremos dos puntos  $a = F(x)$  y  $b = F(x')$  de modo que el interior del segmento  $\overline{ab}$  contenga a  $c$  y no intersecte a  $F(I^2)$ . Supondremos en lo que sigue que  $x$  y  $x'$  son puntos de  $I^2$  que se proyectan en puntos diferentes del toro, dejando el caso degenerado a cargo del lector (éste se resuelve mediante un argumento simple de perturbación). La curva  $\gamma = F(\overline{xx'})$  está contenida en  $F(I^2)$ , une los puntos  $a$  y  $b$ , y se proyecta en una curva simple del toro (vea la figura 14). La validez del lema se desprende entonces de lo siguiente.

**Afirmación.** Si  $a, b$  son dos puntos distintos cualesquiera del plano y  $\gamma$  es una curva que los une y que se proyecta en una curva simple del toro, entonces se tiene la inclusión  $\overline{ab} \subset B_{\sqrt{2}}(\gamma)$ .

Para probar esta afirmación escojamos un sistema de ejes coordenados perpendiculares de modo que  $\overline{ab}$  no sea paralelo a ellos, y consideremos el reticulado  $a + \mathbb{Z}^2$  respecto a este sistema. Basta verificar que si  $\Omega$  designa la región del plano delimitada por  $\overline{ab}$  y  $\gamma$ , entonces todo cuadrado definido por el reticulado cuyo interior intersecta a  $\Omega$  debe también intersectar a  $\gamma$ . Ahora bien, si éste no fuese el caso existiría un trasladado entero  $d$  de  $a$  en  $\Omega$  (vea la

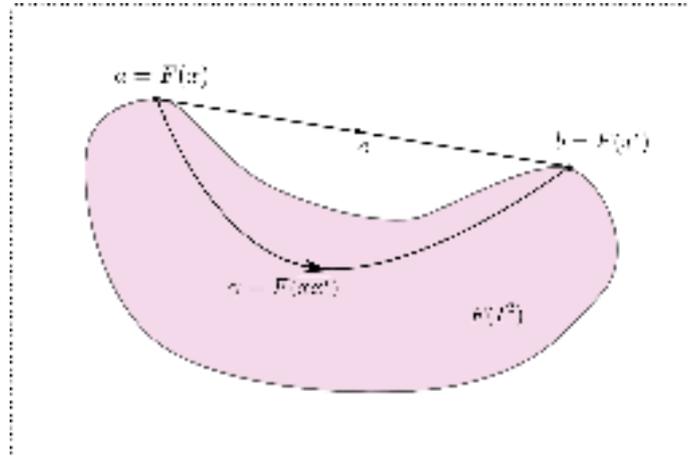


Figura 14: convexidad del conjunto de rotación

figura 15). Si  $h$  denota la traslación del plano con vector de desplazamiento  $d-a$ , entonces  $h(a) = d \in \Omega$  y  $h(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$  (pues  $\gamma$  se proyecta en una curva simple del toro). Sin embargo, estas propiedades contradicen el lema 3.4.  $\square$

**Demostración de la proposición 3.3.** Del lema 3.2 se deduce que

$$\rho(F) \subset \bigcap_{n \geq 1} \text{conv}(K_n(F)).$$

Por otro lado, se tiene de manera evidente

$$K_n(F) \subset B_{\frac{\sqrt{2}}{n}}\left(\frac{F^n(I^2)}{n}\right) \quad \text{y} \quad \frac{F^n(I^2)}{n} \subset B_{\frac{\sqrt{2}}{n}}(K_n(F)),$$

mientras que la proposición precedente aplicada a  $F^n$  nos da

$$\text{conv}(F^n(I^2)) \subset B_{\sqrt{2}}(F^n(I^2)).$$

Se verifica fácilmente que estas relaciones implican la inclusión

$$\text{conv}(K_n(F)) \subset B_{\frac{3\sqrt{2}}{n}}\left(K_n(F)\right).$$

Por lo tanto, si  $v$  es un punto de  $\bigcap_{n \geq 1} \text{conv}(K_n(F))$ , entonces existe una sucesión  $(x_n)$  en  $I^2$  tal que, para todo  $n$ ,

$$\left\| \frac{F^n(x_n) - x_n}{n} - v \right\| \leq \frac{3\sqrt{2}}{n}.$$

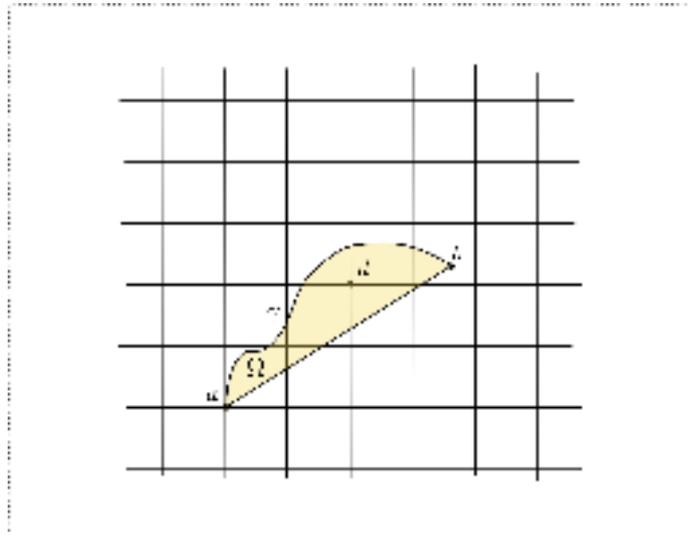


Figura 15: imágenes de curvas simples cercanas a arcos

En particular,

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x_n) - x_n}{n},$$

lo cual demuestra la proposición. □

El conjunto de rotación puede contener información relevante sobre la existencia de puntos fijos o periódicos para homeomorfismos del toro. Sin embargo, el análisis en la presente situación es mucho más delicado que para el caso del círculo. A modo de ejemplo podemos mencionar que, si bien el siguiente resultado (obtenido por Franks en [9]) es muy natural, su demostración dista mucho de ser elemental.

**Teorema 3.6.** *Sea  $f$  un homeomorfismo homotópico a la identidad del toro  $\mathbb{T}^2$ . Si  $(0,0)$  está en el interior del conjunto de rotación  $\rho(f)$ , entonces  $f$  posee al menos un punto fijo.*

### 3.2. Definición como el promedio de los desplazamientos

Teniendo en mente la relación (1), es natural considerar el conjunto

$$\rho_{mes}(F) = \left\{ \int_{\mathbb{T}^2} \phi(y) d\mu(y) : \mu \in \mathbb{P}_{IE}(f) \right\},$$

donde  $\mathbb{P}_{IE}(f)$  designa el conjunto de las medidas de probabilidad ergódicas e invariantes por  $f$ , mientras que  $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es la función que a cada  $y \in \mathbb{T}^2$  asocia el valor de  $F(x) - x$  para algún (equivalentemente, cualquier) preimagen  $x$  de  $y$ . Dicho conjunto desciende (módulo  $\mathbb{Z}^2$ ) en un conjunto  $\rho_{mes}(f)$ , al que llamamos el conjunto de las rotaciones promedio de  $f$ .

**Observación 3.7.** Note que

$$\text{conv}(\rho_{mes}(F)) = \left\{ \int_{\mathbb{T}^2} \phi(x) d\mu(x) : \mu \in \mathbb{P}_I(f) \right\},$$

donde  $\mathbb{P}_I(f)$  designa el conjunto de medidas de probabilidad invariantes por  $f$  (no necesariamente ergódicas).

Por el teorema ergódico de Birkhoff, si  $\mu \in \mathbb{P}_{IE}(f)$  entonces para  $\mu$  casi todo punto  $y$  del toro se tiene la convergencia

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(y)) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^2} \phi d\mu,$$

es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \int_{\mathbb{T}^2} \phi d\mu,$$

lo cual implica que  $\int_{\mathbb{T}^2} \phi d\mu \in \rho(f)$ . Concluimos entonces que

$$\rho_{mes}(F) \subset \rho_p(F).$$

A nivel de cierres convexos se tiene sin embargo la igualdad de los distintos conjuntos de rotación, como queda estipulado en la siguiente proposición.

**Proposición 3.8.** *Se tiene la igualdad  $\text{conv}(\rho_{mes}(F)) = \rho(F)$ .*

**Demostración.** Fijemos un punto  $v \in \rho(F)$  de modo que

$$v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}.$$

Si definimos la sucesión de medidas de probabilidad

$$\mu_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=0}^{n_i-1} \delta_{f^k(y_i)}$$

entonces pasando a una subsucesión podemos asumir que  $(\mu_i)$  converge a una medida  $\mu$ , la cual es invariante por  $f$  y satisface

$$\int_{\mathbb{T}^2} \phi d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^2} \phi d\mu_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = v.$$

De la observación 3.7 concluimos que  $v$  pertenece a  $\text{conv}(\rho_{mes}(F))$ . Deducimos entonces que  $\rho(F) \subset \text{conv}(\rho_{mes}(F))$ . La inclusión contraria se desprende de  $\rho_{mes}(F) \subset \rho(F)$ .  $\square$

Para cerrar esta sección nos concentraremos en un resultado obtenido por Franks en [7], el cual relaciona la estructura del conjunto de las rotaciones promedio con la existencia de puntos fijos.

**Teorema 3.9.** *Sea  $f$  un homeomorfismo homotópico a la identidad del toro  $\mathbb{T}^2$ . Si  $(0, 0)$  pertenece al conjunto de las rotaciones promedio  $\rho_{mes}(f)$ , entonces  $f$  posee al menos un punto fijo.*

Para la demostración de este resultado será necesaria una versión muy particular de un interesantísimo lema de teoría ergódica debido a Atkinson [1].

Fijemos una función real medible  $\varphi$  definida sobre un espacio de probabilidad  $(X, \mu)$ , y consideremos un automorfismo ergódico  $T$  de dicho espacio. El *cociclo de  $T$  respecto a  $\varphi$*  es la función  $c : \mathbb{Z} \times X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$c(n, x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(T^i(x)), & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ -c(-n, T^n(x)), & n < 0. \end{cases}$$

El nombre *cociclo* viene del hecho que  $c$  satisface la ecuación funcional

$$c(m + n, x) = c(m, x) + c(n, T^m(x)). \quad (3)$$

**Proposición 3.10.** *Supongamos que  $\varphi$  sea integrable. Si la integral de  $\varphi$  respecto a  $\mu$  es nula, entonces para casi todo punto  $x$  la sucesión  $(|c(n, x)|)_{n \geq 0}$  posee una subsucesión acotada.*

**Demostración.** La igualdad (3) muestra que el conjunto de puntos  $x$  verificando la afirmación de la proposición es invariante por  $T$ . Por ergodicidad, dicho conjunto tiene medida nula o total. Supongamos que su medida sea nula, y para casi todo  $x$  consideremos el conjunto finito  $I(x) = \{n > 0 : |c(n, x)| \leq 1\}$ . Si definimos  $A_n = \{x \in X : \text{card}(I(x)) < n\}$  entonces

se tiene  $\mu(A_N) > 1/2$  para todo  $N$  suficientemente grande. Fijemos un tal entero  $N$ . Por el teorema ergódico de Birkhoff, si  $n$  es suficientemente grande entonces más de la mitad de los puntos de  $\{T(x), \dots, T^n(x)\}$  pertenece a  $A_N$ . Sean  $i_1, \dots, i_r$  los índices correspondientes a aquellos puntos  $T^{i_j}(x)$  en  $A_N$ ; se tiene entonces  $r > n/2$ . La relación (3) y la definición de  $A_N$  muestran que en cada intervalo de centro  $c(i_j, x)$  y radio  $1/2$  puede haber a lo más  $N - 1$  otros valores  $c(i_{j'}, x)$ . Por lo tanto, si un intervalo tiene longitud menor a  $(r - 1)/2N$ , entonces dicho intervalo no puede contener a todos los  $c(i_j, x)$ . Se deduce entonces que

$$\sup_{1 \leq i \leq n} |c(i, x)| \geq \frac{r - 1}{4N} \geq \frac{n - 1}{8N}.$$

De lo anterior se desprende fácilmente que para casi todo  $x$  se tiene la desigualdad  $|c(i, x)| \geq i/9N$  para infinitos enteros positivos  $i$ . El teorema ergódico de Birkhoff permite concluir entonces que

$$\left| \int_X \varphi d\mu \right| \geq \frac{1}{9N},$$

lo cual viola nuestra hipótesis de nulidad de la integral de  $\varphi$ . □

**Ejercicio 3.11.** Usando el teorema ergódico de Birkhoff, pruebe la validez de la recíproca de la proposición 3.10.

**Demostración del teorema 3.9.** Debido a la proposición 2.9, basta probar que el levantamiento  $F$  de  $f$  respecto al cual la función  $\phi$  asociada satisface  $\int_{\mathbb{T}^2} \phi(y) d\mu(y) = 0$  posee puntos recurrentes por cadenas. Para ello consideremos un punto  $x$  del plano que se proyecte en un punto  $y$  del toro que sea recurrente por  $f$  y para el cual la conclusión de la proposición 3.10 sea válida para las funciones  $\tau_1 \circ \phi$  y  $\tau_2 \circ \phi$  (dicho punto existe debido a que la rotación promedio de  $F$  respecto a  $\mu$  es el vector cero). Supongamos que la órbita de  $x$  bajo  $F$  no admita subsucesión acotada (en caso contrario, un punto de adherencia de dicha órbita sería un punto recurrente por cadenas para  $F$ ). Fijemos  $\varepsilon > 0$  arbitrario, y consideremos el conjunto  $V(\varepsilon)$  de los pares  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  tales que existe una  $\varepsilon$ -cadena desde  $x$  a  $x + (m, n)$ . Probaremos que  $(0, 0)$  pertenece a  $V(\varepsilon)$ , lo cual concluirá la demostración.

Ahora bien, siendo  $V(\varepsilon)$  cerrado bajo adición, si  $(0, 0)$  no pertenece a él entonces dicho conjunto está contenido en un semiespacio. En lo que sigue supondremos que este semiespacio es  $V_+ = \{(a, b) : b \geq 0\}$  (el lector no tendrá dificultad en adaptar el argumento dado a continuación al caso general).

Fijemos un constante  $C > 0$  tal que para infinitos enteros positivos  $i, j$  se tengan las desigualdades  $|\tau_1(F^i(x) - x)| \leq C$  y  $|\tau_2(F^j(x) - x)| \leq C$ . Como la órbita de  $x$  no tiene

valores de adherencia, si  $(i_k)$  es una sucesión creciente de índices tales que  $\tau_1(F^{i_k}(x) - x) \leq C$  entonces la sucesión  $|\tau_2(F^{i_k} - x)|$  diverge. Pasando a una subsucesión, podemos asumir que  $\tau_2(F^{i_k} - x)$  tiende a  $+\infty$  o  $-\infty$ , y siendo ambos casos análogos consideraremos sólo el primero. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  escojamos  $j_k \in \mathbb{N}$  mayor que  $i_k$  y tal que  $|\tau_2(F^{j_k}(x) - x)| \leq C$ .

Como en la demostración del teorema 2.10, es fácil ver que existe  $N > 0$  tal que, independientemente de  $k$ , existe una  $\varepsilon$ -cadena para  $f$  desde  $y$  a  $f^{i_k}(y)$ . Ello se traduce en la existencia de una constante  $\bar{C}$  tal que para todo  $k$  existe una  $\varepsilon$ -cadena para  $F$  desde cierto punto  $x'_k$  a  $F^{i_k}(x)$ , donde  $x'_k - x$  tiene coordenadas enteras y  $|F^{i_k}(x) - x'_k| \leq \bar{C}$ . Análogamente, para todo  $k$  existe una  $\varepsilon$ -cadena para  $F$  desde  $F^{j_k}(x)$  a cierto punto  $x''_k$ , donde  $x''_k - x$  tiene coordenadas enteras y  $|F^{j_k}(x) - x''_k| \leq \bar{C}$ . Concatenando la primera cadena con el segmento de órbita entre  $F^{i_k}(x)$  y  $F^{j_k}(x)$ , y luego concatenando con la segunda cadena precedente, obtenemos una  $\varepsilon$ -cadena entre  $x'_k$  y  $x''_k$ . La diferencia  $x'_k - x''_k$  tiene coordenadas enteras, y se comprueba fácilmente que la segunda coordenada del vector diferencia tiende a  $-\infty$ . Sin embargo, esto contradice el hecho que  $V(\varepsilon)$  está contenido en el semiespacio  $V_+$ .  $\square$

**Ejercicio 3.12.** Siguiendo una idea de Herman, considere el homeomorfismo  $f$  del toro tridimensional  $\mathbb{T}^3$  definido por  $f(a, b, c) = (a + \cos(2\pi c), b + \sin(2\pi c), c)$ . Dicho homeomorfismo admite un levantamiento  $F$  a  $\mathbb{R}^3$  definido por la misma fórmula. Verifique que todo punto del espacio es errante para  $F$ . Compruebe sin embargo que la función de desplazamiento asociada  $\phi$  satisface

$$\int_{\mathbb{T}^3} \phi \, d\mu = (0, 0, 0),$$

donde  $\mu$  designa la medida de Lebesgue (la cual es invariante por  $f$ ).

### 3.3. Un ejemplo interesante

Para concluir estas notas presentamos un interesante ejemplo debido a Bestvina y Handel [3] que ilustra el siguiente hecho sorprendente: existen difeomorfismos libres del toro  $\mathbb{T}^2$  isotópicos a la identidad, que preservan el área, y para los cuales ninguna curva cerrada simple libre es *esencial*, *i.e.* homotópicamente no trivial. Esto debiese ser comparado con un resultado de Bonatti y Guillou [12], el cual estipula que para todo homeomorfismo libre del anillo cerrado existe ya sea una curva cerrada simple esencial y libre, o bien un arco simple y libre que une los bordes del anillo y cuya intersección con este borde coincide con sus extremidades.

La construcción de Bestvina y Handel usa un ingenioso argumento de renormalización que se apoya sobre la siguiente observación.

**Observación fundamental.** Si  $L$  es una transformación lineal invertible de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $L(\mathbb{Z}^2)$  contiene a  $\mathbb{Z}^2$ , entonces para todo levantamiento al plano  $F$  de cualquier homeomorfismo  $f$  del toro vale la igualdad

$$\rho(L \circ F \circ L^{-1}) = L(\rho(F)). \quad (4)$$

Observe que no estamos suponiendo que  $L(\mathbb{Z}^2)$  coincida con  $\mathbb{Z}^2$ ; en otras palabras, no asumimos que  $L$  pertenezca a  $GL(2, \mathbb{Z})$ . Pese a ello, la propiedad más débil  $\mathbb{Z}^2 \subset L(\mathbb{Z}^2)$  garantiza que  $L \circ F \circ L^{-1}$  induce un homeomorfismo del toro, pues para todo entero  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  existe  $(m', n') \in \mathbb{Z}^2$  tal que  $L((m', n')) = (m, n)$ , por lo que para todo punto  $x$  del plano se tiene

$$\begin{aligned} L \circ F \circ L^{-1}(x + (m, n)) &= L \circ F \circ L^{-1}(x + L((m', n'))) \\ &= L(F(L^{-1}(x) + (m', n'))) \\ &= L(F \circ L^{-1}(x) + (m', n')) \\ &= L \circ F \circ L^{-1}(x) + (m, n). \end{aligned}$$

Para verificar la igualdad (4) basta observar primeramente que si  $\rho$  pertenece a  $\rho(F)$  y si  $(x_i), (n_i)$  son sucesiones respectivamente de puntos del plano y de enteros positivos distintos tales que

$$\rho = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(x_i)}{n_i},$$

entonces

$$L(\rho) = \lim_{i \rightarrow \infty} L\left(\frac{F^{n_i}(x_i)}{n_i}\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(L \circ F \circ L^{-1})^{n_i}(L(x_i))}{n_i},$$

lo cual muestra que  $L(\rho)$  pertenece a  $\rho(L \circ F \circ L^{-1})$ . La inclusión  $\rho(L \circ F \circ L^{-1}) \subset L(\rho(F))$  se verifica de manera análoga.

El lema siguiente otorga un criterio simple para probar que curvas esenciales intersectan a sus imágenes por ciertos homeomorfismos del toro.

**Lema 3.13.** *Sea  $f$  un homeomorfismo de  $\mathbb{T}^2$  isotópico a la identidad que admite una curva cerrada simple esencial que no intersecta a su imagen. Si  $F$  es un levantamiento cualquiera de  $f$  al plano, entonces existen dos rectas paralelas que determinan una franja que contiene al conjunto de rotación  $\rho(F)$  y que no contiene ningún punto del reticulado  $\mathbb{Z}^2$  en su interior.*

**Demostración.** Cualquier levantamiento  $\tilde{\gamma}$  de la curva  $\gamma$  en cuestión queda contenida en alguna vecindad de una recta del plano. Además, existen elementos de  $GL(2, \mathbb{R})$  que envían dicha recta en una recta vertical. Conjugando por alguno de estos elementos, podemos asumir que  $\tilde{\gamma}$  queda contenida en una  $M$ -vecindad del eje de las ordenadas, es decir que  $|\tau_1((x, y))| \leq M$  para todo  $(x, y) \in \tilde{\gamma}$ .

Para  $k \geq 0$  designemos  $\tilde{\gamma}_k = \tilde{\gamma} + (k, 0)$ , y denotemos por  $R_k$  la región delimitada por  $\tilde{\gamma}$  y  $\tilde{\gamma}_k$ . Componiendo con una traslación horizontal entera si es necesario, podemos asumir que  $F(\tilde{\gamma})$  está contenido en  $R_1$ . Resulta rutinario verificar entonces que la contención  $F^n(\tilde{\gamma}) \subset R_{n+1}$  vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, si  $(x, y) \in R_1$  entonces

$$-M \leq \tau_1(F^n((x, y))) \leq M + n + 1.$$

Dividiendo por  $n$  y pasando al límite concluimos que  $\rho(F)(x) \in [0, 1]$ . Por lo tanto, el conjunto de rotación de  $F$  queda contenido en la franja  $\{(x, y) : |x| \leq 1\}$ , la cual no contiene puntos del reticulado entero en su interior.  $\square$

Para completar la construcción de nuestro ejemplo basta con exhibir un difeomorfismo isotópico a la identidad del toro admitiendo un levantamiento  $F$  al plano tal que:

- (i) el conjunto de rotación  $\rho(F)$  coincide con el cuadrilátero  $Q(a, b, c, d)$  de vértices  $a, b, c$  y  $d$ ,
- (ii) dicho cuadrilátero no contiene ningún punto del reticulado  $\mathbb{Z}^2$ ,
- (iii) la proyección de  $Q(a, b, c, d)$  sobre cualquier recta del plano es un intervalo de longitud estrictamente mayor a 1.

En efecto, de (i) y (ii) se deduce que  $f$  no admite puntos fijos. Ahora bien, dado que toda franja del plano que no contiene puntos de  $\mathbb{Z}^2$  tiene ancho menor o igual que 1 (dejamos la verificación de esto al lector), por (iii) y por el lema precedente no puede existir ninguna curva esencial  $\gamma$  que sea disjunta de su imagen por  $f$ .

Para construir  $f$  comenzamos considerando un difeomorfismo  $f_1$  del toro que es la composición de un “doblez” en la dirección  $v_1 = (1, 1)$  seguido de un dobléz en la dirección  $v_2 = (1, -1)$ . De manera más precisa, fijemos  $\varepsilon \in ]0, 1/4[$  y para  $i \in \{1, 2\}$  consideremos funciones  $\eta_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  que sean invariantes por las traslaciones enteras, nulas sobre el conjunto  $]\varepsilon, 1 - \varepsilon[ \times \{0\}$ , iguales a 1 sobre el reticulado, y de modo que cada  $\eta_i$  sea constante a lo largo de cada recta paralela a la dirección  $v_i$ . Hacemos entonces  $H_i(x) = x + \eta_i(x)v_i$  y  $F_1 = H_2 \circ H_1$ . La aplicación  $F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  induce claramente un difeomorfismo conservativo (e isotópico a la identidad) del toro  $\mathbb{T}^2$ .

Consideremos ahora la función desplazamiento  $\varphi = F_1 - Id$ . Esta función lleva respectivamente a  $(0, 0)$ ,  $(1/4, 1/4)$ ,  $(1/4, -1/4)$  y  $(1/2, 0)$  en  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$  y  $(0, 0)$ ; como estos últimos puntos tienen coordenadas enteras, ellos están contenidos en  $\rho(F_1)$ . Además, la imagen de la función desplazamiento  $\varphi = \eta_1 v_1 + (\eta_2 \circ H_1)v_2$  está contenida en el cuadrilátero  $Q((2, 0), (1, 1), (1, -1), (0, 0))$  generado por  $v_1$  y  $v_2$ . Del teorema 3.1 concluimos que  $\rho(F_1)$  coincide con este cuadrilátero.

Nuestra aplicación  $f$  será inducida por un difeomorfismo  $F$  del plano que corresponderá al levantamiento a un cubrimiento finito del toro de un iterado de  $F_1$ . De manera más precisa, para cada  $k \geq 2$  consideremos  $F_2$  definido por  $F_k(x) = F_1^{2k-2}(x) + (1 - k, 1)$ . Tenemos entonces

$$\rho(F_k) = Q((3k - 3, k), (k - 1, 3k - 2), (k - 1, 2 - k), (1 - k, k)).$$

Si  $H_k(x) = x/2k$  entonces  $H_k \circ F_k \circ H_k^{-1}$  induce un difeomorfismo conservativo del toro, con

$$\rho(H_k \circ F_k \circ H_k^{-1}) = H_k(Q((3k - 3, k), (k - 1, 3k - 2), (k - 1, 2 - k), (1 - k, k))).$$

Dejamos al lector la tarea de verificar que para todo  $k \geq 2$  (resp. para  $k$  suficientemente grande), la propiedad (ii) (resp. la propiedad (iii)) es satisfecha.

## Referencias

- [1] ATKINSON, G. Recurrence of cocycles and random walks. *Journal of the London Math. Soc.* **13** (1976), 486-488.
- [2] AIGNER, M. & GÜNTER M. *Proofs from The Book*. Springer-Verlag, Berlin (2004).
- [3] BESTVINA, M. & HANDEL, M. An area preserving homeomorphism of  $T^2$  that is fixed point free but does not move any essential simple closed curve off itself. *Erg. Theory and Dynam. Systems* **12** (1992), 673-676.
- [4] BIRKHOFF, G. *Dynamical systems*. Colloquium Publications, AMS (1927).
- [5] CASSON, A., BLEILER, S. Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston. *London Mathematical Society Student Texts* **9**, Cambridge University Press, Cambridge (1988).
- [6] FLUCHER, M. Fixed points of measure preserving torus homeomorphisms. *Manusc. Math.* **68** (1990), 271-293.
- [7] FRANKS, J. Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms. *Erg. Theory and Dynam. Systems* **8** (1988), 99-107.
- [8] FRANKS, J. Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem. *Annals of Math.* **128** (1988), 139-151.
- [9] FRANKS, J. Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms. *Trans. of the AMS* **311** (1989), 107-115.
- [10] FRANKS, J. A new proof of the Brouwer plane translation theorem. *Erg. Theory and Dynam. Systems* **12** (1992), 217-226.
- [11] GUILLEMIN, V., POLLAK, A. *Differential Topology*. Prentice Hall (1974). Traducción al castellano en la serie *Aportaciones Matemáticas*, Sociedad Matemática Mexicana, México (2003).
- [12] GUILLOU, L. Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff. *Topology* **33** (1994), 331-352.
- [13] LE CALVEZ, P. Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer. *Publ. Math. de l'IHÉS* **102** (2006), 1-98.
- [14] LE CALVEZ, P. Une version feuilletée du théorème de translation de Brouwer. *Comment. Math. Helv.* **79** (2004), 229-259.
- [15] LE CALVEZ, P. Rotation numbers in the infinite annulus. *Proc. AMS* **129** (2001), 3221-3230.
- [16] LE CALVEZ, P. & SAUZET, A. Une preuve dynamique du théorème de translation plane de Brouwer. *Expo. Math.* **14** (1996), 277-287.
- [17] MAÑÉ, R. *Introdução à Teoria Ergódica*. Projeto Euclides (1983).
- [18] MISIUREWICZ, M. & ZIEMIAN, K. Rotation sets for maps of tori. *Journal of the London Math. Soc.* **40** (1989), 490-506.
- [19] NAVAS, A. *Grupos de difeomorfismos del círculo*. Monografías del IMCA (2006).

- [20] LE ROUX, F. Bounded recurrent sets for planar homeomorphisms. *Erg. Theory and Dynam. Systems* **19** (1999), 1085-1091.
- [21] SAUZET, A. *Application des décompositions libres à l'étude des homéomorphismes d surface*. Tesis doctoral, Univ. Paris 13 (2001).
- [22] STRUWE, M. *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. Springer Verlag (2000).
- [23] Travaux de Thurston sur les surfaces. Séminaire Orsay. *Astérisque* **66-67**, Société Mathématique de France, Paris (1979).