El centro de algo

Baricentros de medidas y exponentes de Lyapunov nulos

De la antigua Grecia

Geometría del triángulo:

- **Baricentro**
- **Circuncentro**
- Incentro
- Ortocentro

Otros puntos notables fueron descubiertos a partir del siglo 17.

De “Los Elementos” de Euclides

El circuncentro y el baricentro

- Si un triángulo no es obtusángulo, entonces su circuncentro coincide con el centro del círculo de menor radio que lo contiene (ejercicio).

El circuncentro y el baricentro

- Si un triángulo no es obtusángulo, entonces su circuncentro coincide con el centro del círculo de menor radio que lo contiene (ejercicio).
- El baricentro es el punto que minimiza la expresión

$$X \rightarrow \tfrac{1}{3}\,\mathrm{dist}\,(X,A)^2 + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{dist}\,(X,B)^2 + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{dist}\,(X,C)^2$$

El circuncentro y el baricentro

- Si un triángulo no es obtusángulo, entonces su circuncentro coincide con el centro del círculo de menor radio que lo contiene (ejercicio).
- El baricentro es el punto que minimiza la expresión

$$X \rightarrow \tfrac{1}{3}\,\mathrm{dist}\,(X,A)^2 + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{dist}\,(X,B)^2 + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{dist}\,(X,C)^2$$

Alternativamente, si consideramos un nuevo triángulo cuyos vértices son los puntos medios del original e iteramos este proceso “al infinito”, el punto límite es el baricentro de todos estos triángulos (ejercicio).

Generalizaciones

- Estas nociones se generalizan a espacios euclidianos de dimensión arbitraria, incluyendo espacios de Hilbert (y a veces a espacios de Banach uniformemente convexos).
- El “buen contexto” es el de los espacios (métricos completos) a curvatura no positiva (espacios CAT(0), espacios de Buseman).

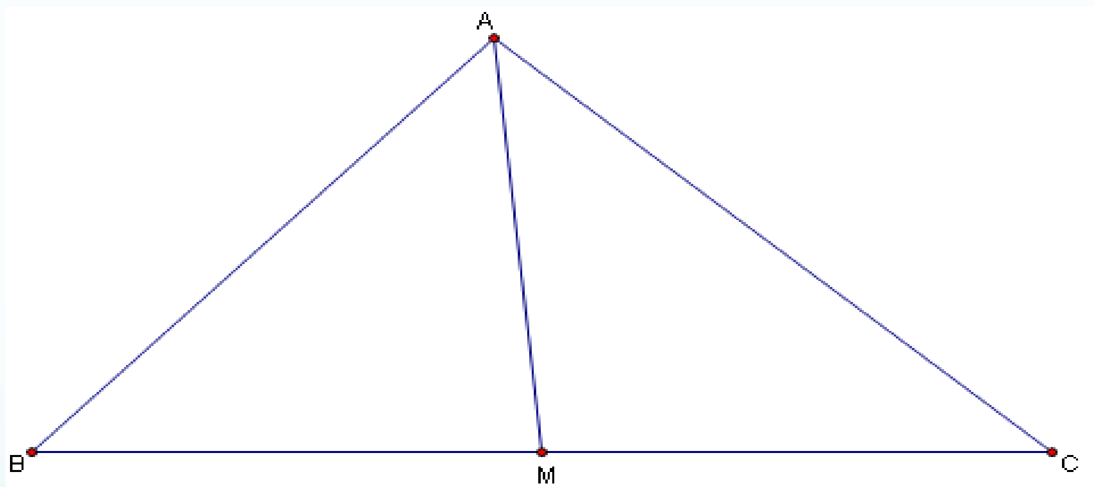
Generalizaciones

- Estas nociones se generalizan a espacios euclidianos de dimensión arbitraria, incluyendo espacios de Hilbert (y a veces a espacios de Banach uniformemente convexos).
- El "buen contexto" es el de los espacios (métricos completos) a curvatura no positiva (espacios CAT(0), espacios de Buseman).

Ej: el centro de Chebyshev de un conjunto acotado es el centro de la bola cerrada de menor radio que lo contiene (existe y es único para espacios CAT(0), ...).

Curvatura no positiva I

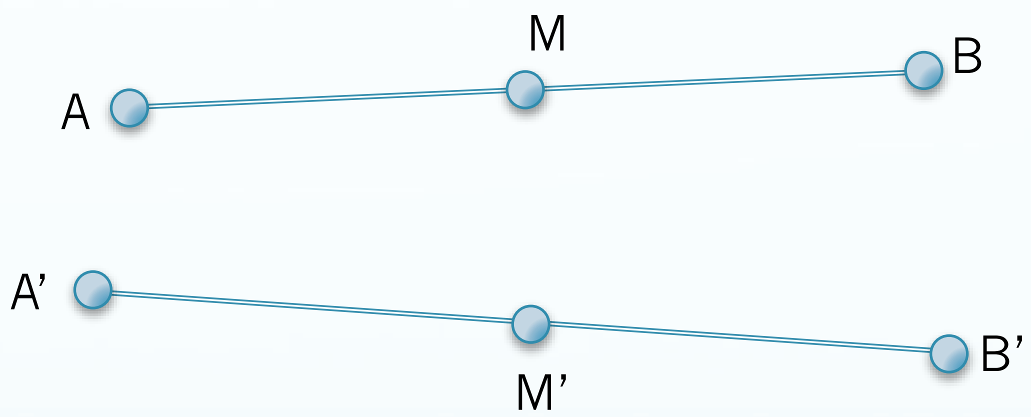
Espacios CAT(0): la función distancia es tan convexa como lo es en el plano euclidiano:



$$\mathrm{dist}\,(A, M)^2 \leq \tfrac{1}{2}\,\mathrm{dist}\,(A,B)^2 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{dist}\,(A,C)^2 - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{dist}\,(B,C)^2$$

Curvatura no positiva II

Espacios de Buseman: la función distancia a lo largo de geodésicas es convexa:



dist (M,M') $\leq$ ½ dist (A,A') + ½ dist (B,B')

Ejemplos

- La recta real… (árboles reales)

Ejemplos

- La recta real... (árboles reales)
- Variedades riemannianas de curvatura seccional no positiva (CAT(0)).

Ejemplos

- La recta real… (árboles reales)
- Variedades riemannianas de curvatura seccional no positiva (CAT(0)).
- Espacios simétricos asociados a grupos de Lie semisimples.

Ejemplos

- La recta real… (árboles reales)
- Variedades riemannianas de curvatura seccional no positiva (CAT(0)).
- Espacios simétricos asociados a grupos de Lie semisimples.
- Espacio SL(n,R)/SO(n,R) de matrices simétricas positivas (en dimensión infinita, es un espacio de Buseman que no es CAT(0) si no se restringe a operadores de Hilbert-Schmidt).

Teoremas de punto fijo

- (Cartan, Bruhat-Tits): Si un grupo actúa sobre un espacio CAT(0) con una órbita acotada, entonces la acción admite un punto fijo.
- (folklore): Idem si se trata de una acción sobre un espacio de Banach uniformemente convexo.

Teoremas de punto fijo

- (Cartan, Bruhat-Tits): Si un grupo actúa sobre un espacio CAT(0) con una órbita acotada, entonces la acción admite un punto fijo.
- (folklore): Idem si se trata de una acción sobre un espacio de Banach uniformemente convexo.

Demostración: El centro de una órbita acotada debe permanecer fijo.

Teoremas de punto fijo

- (Cartan, Bruhat-Tits): Si un grupo actúa sobre un espacio CAT(0) con una órbita acotada, entonces la acción admite un punto fijo.
- (folklore): Idem si se trata de una acción sobre un espacio de Banach uniformemente convexo.

Demostración: El centro de una órbita acotada debe permanecer fijo.

Algunas repercusiones clásicas del mismo principio: teoría de Favard, lema de Gottschalk-Hedlund, etc...

Algunas extensiones

- Teor (Coronel-N-Ponce): Lo mismo vale para acciones sobre espacios de funciones acotadas (rel. teorema Ryll-Nardewski) y espacios de funciones continuas (módulo una hipótesis dinámica natural -minimalidad-).
- Teor (Bader-Gelander-Monod): Idem para espacios L^1. Más generalmente, para preduales de álgebras de von Newmann.

El problema de la derivación

M: álgebra C^*

Derivación: $\delta : M \rightarrow M$ tal que $\delta(fg) = \delta(f)\, g + f\ \delta(g)$

Derivación interna: $\delta(f) = hf - fh$

Teor (Losert, B-G-M): Toda derivación de un predual de un álgebra de von Newmann es interna.

Ecuaciones cohomológicas en dinámica

- Sea $f: M \to M$ una dinámica minimal. Si una función continua $v : M \to R$ es tal que la ecuación cohomológica $u(f) - u = v$ posee una solución limitada, entonces posee una solución continua.

Ecuaciones cohomológicas en dinámica

- Sea $f: M \to M$ una dinámica minimal. Si una función continua $v : M \to R$ es tal que la ecuación cohomológica $u(f) - u = v$ posee una solución limitada, entonces posee una solución continua.

Dem: una solución limitada induce una órbita acotada para la acción de la isometría $I: C(M) \to C(M)$:

$$I(w)(x) = w(f(x)) + v(x)$$

Un pequeño cálculo I: sumas de Birkhoff

$I(w)(x) = w(f(x)) + v(x) \rightarrow$

$I^2(w)(x) = [w(f^2(x)) + v(f(x))] + v(x) \rightarrow$

$I^3(w) = [w(f^3(x)) + v(f^2(x)) + v(f(x))] + v(x) \rightarrow \ldots$

$I^n(w) = w(f^n) + [v(f^{n-1}) + v(f^{n-2}) + \ldots + v(f^2) + v(f) + v]$

Un pequeño cálculo II: reducción

$$I^n(w) = w(f^n) + v(f^{n-1}) + v(f^{n-2}) + v(f^{n-3}) + \ldots + v(f) + v$$

Si $v = u(f) - u$ entonces $I^n(w)$ es igual a:

Un pequeño cálculo II: reducción

$I^n(w) = w(f^n) + v(f^{n-1}) + v(f^{n-2}) + v(f^{n-3}) + \ldots + v(f) + v$

Si $v = u(f) - u$ entonces $I^n(w)$ es igual a:

$w(f^n) + \ldots$

Un pequeño cálculo II: reducción

$$I^n(w) = w(f^n) + v(f^{n-1}) + v(f^{n-2}) + v(f^{n-3}) + \ldots + v(f) + v$$

Si $v = u(f) - u$ entonces $I^n(w)$ es igual a:

$w(f^n) + [u(f^n) - u(f^{n-1})] + \ldots$

Un pequeño cálculo II: reducción

$I^n(w) = w(f^n) + v(f^{n-1}) + v(f^{n-2}) + v(f^{n-3}) + \ldots + v(f) + v$

Si $v = u(f) - u$ entonces $I^n(w)$ es igual a:

$w(f^n) + [u(f^n) - u(f^{n-1})] + [u(f^{n-1}) - u(f^{n-2})] + \ldots$

Un pequeño cálculo II: reducción

$$I^n(w) = w(f^n) + v(f^{n-1}) + v(f^{n-2}) + v(f^{n-3}) + \ldots + v(f) + v$$

Si $v = u(f) - u$ entonces $I^n(w)$ es igual a:

$$w(f^n) + [u(f^n) - u(f^{n-1})] + [u(f^{n-1}) - u(f^{n-2})] + [u(f^{n-2}) - u(f^{n-3})] + \ldots$$

Un pequeño cálculo II: reducción

$$I^n(w) = w(f^n) + v(f^{n-1}) + v(f^{n-2}) + v(f^{n-3}) + \ldots + v(f) + v$$

Si $v = u(f) - u$ entonces $I^n(w)$ es igual a:

$$w(f^n) + [u(f^n) - u(f^{n-1})] + [u(f^{n-1}) - u(f^{n-2})] + [u(f^{n-2}) - u(f^{n-3})] + \ldots$$

$$I^n(w) = w(f^n) + [u(f^n) - u]$$

Un desliz a la teoría de grupos

Existen grupos infinitos muy “rígidos” de modo que “TODAS” las acciones por isometrías tienen órbita acotada (Gromov: casi todos los grupos son así).

1) Grupos con la prop. (FH) de Serre (equivalentemente, con la prop. (T) de Kazhdan): punto fijo para espacios de Hilbert. Ej: $SL(n,Z)$, $n > 2$.

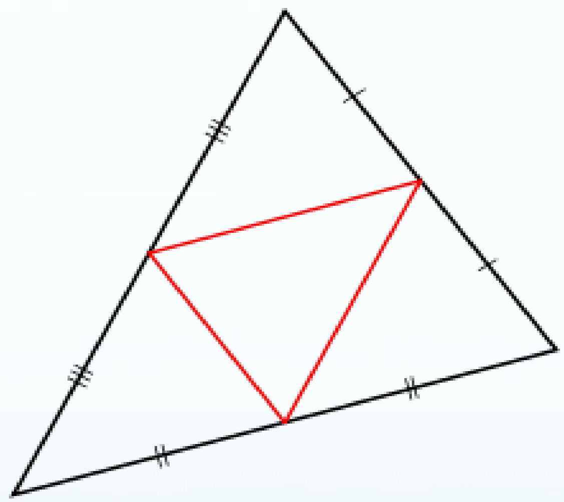
2) Grupos con la prop. (FA): acciones en árboles.

Ejercicio: (FH) → (FA)

Teor (N): (FH) → (FS^1): toda acción de un grupo (FH) y fin. gener. por difeomorfismos del círculo tiene imagen finita.

Baricentro de un triángulo

Dado un triángulo, consideramos un nuevo triángulo cuyos vértices son los puntos medios de sus lados.



Si iteramos este proceso. Obtendremos un punto límite cuando el espacio subyacente es de Buseman.

Baricentro de un polígono

Para cuatro puntos: $b(A_1,A_2,A_3,A_4)$ coincide con

$$b\Big(b(A_2,A_3,A_4),b(A_1,A_3,A_4),b(A_1,A_2,A_4),b(A_1,A_2,A_3)\Big)$$

Desigualdad:

$$\mathrm{dist}\,(b(A_1,A_2,A_3,A_4),\ b(B_1,B_2,B_3,B_4)) \leq \tfrac{1}{4} \sum_i \mathrm{dist}\,(A_i,B_i)$$

En general: proceder por inducción (Vogtmann et all, Ando et all (N-Larotonda), Es-Sahib-Einich, etc).

Baricentro de una probabilidad

Si μ es una medida de probabilidad puramente ató-mica con átomos (no necesar. distintos) $A_1,\ldots,A_n$, de igual masa, quisiéramos definir

$$\text{bar}(\mu) := b(A_1,\ldots,A_n)$$

Problema: $b(A_1,A_2,A_3) \neq b(A_1,A_2,A_3,A_1,A_2,A_3)$

Solución: $\text{bar}(\mu) = \text{lím}_k\, b(A_1,\ldots A_n,A_1,\ldots,A_n,\ldots\ldots,A_1,\ldots A_n)$

La convergencia no es evidente (N): está relacionada con una “ley de los grandes números” (en curv. ≤ 0...)

Una aplicación

Teor (N): La aplicación bar: $P^1(M) \rightarrow M$ está bien definida y es 1-Lipschitz para la 1-métrica de Wasserstein (del transporte óptimo).

(Construcción alternativa de Cartan para espacios CAT(0) minizando el promedio del cuadrado de dist).

Teor (N): Todo grupo compacto actuando en un espacio de Buseman admite un punto fijo.

Dem: El baricentro de la medida inducida por la medida de Haar permanece fijo…

Cociclos de isometrías

Dados un sistema dinámico $f: M \to M$ y un "cociclo" de isometrías de un espacio H,

$I: M \to \mathrm{Isom}(H)$, consideramos los productos

$$I^n(x) := I(f^{n-1}(x))\, I(f^{n-2}(x)) \cdots I(f(x))\, I(x)$$

La "razón de escape" del punto x es el límite de

$$1/n \;\; \mathrm{dist}(I^n(x)(h),h)$$

Razón de escape nula

Si $\sup_n \text{dist}(l^n(x)h,h)$ es finito, estamos en el contexto de órbitas acotadas: si H es CAT(0) entonces existe una función (sección) continua $u: M \to H$ tal que

$$l(x)\,(u(x)) = u(f(x))$$

Razón de escape nula

Si $\sup_n \mathrm{dist}\,(I^n(x)h,h)$ es finito, estamos en el contexto de órbitas acotadas: si H es CAT(0) entonces existe una función (sección) continua $u: M \to H$ tal que

$$I(x)\,(u(x)) = u(f(x))$$

Teor (Bochi-N): Supongamos que la razón de escape es nula y H es de Buseman. Entonces existe una sucesión u_n de funciones continuas tal que

$$\lim_n \mathrm{dist}\Big(I(x)\,(u_n(x)),\ u_n(f(x)\Big) = 0$$

Demostración

La solución aproximada de la ecuación es un baricentro a lo largo de una órbita:

$$u_n(x) = b\left(I(x)^{-1}(h), I^2(x)^{-1}(h), \ldots, I^n(x)^{-1}(h)\right)$$

Demostración

La solución aproximada de la ecuación es un baricentro a lo largo de una órbita:

$$u_n(x) = b\left(I(x)^{-1}(h), I^2(x)^{-1}(h),\dots, I^n(x)^{-1}(h)\right)$$

En efecto:

$$I(x)(u_n(x)) = b\left(h, I(f(x))^{-1}(h),\dots,I^{n-1}(f(x))^{-1}(h)\right)$$

$$u_n(f(x)) = b\left(I(f(x))^{-1}(h),\dots,I^{n-1}(f(x))^{-1}(h),I^n(f(x))^{-1}(h)\right)$$

Demostración

La solución aproximada de la ecuación es un baricentro a lo largo de una órbita:

$$u_n(x) = b\left(I(x)^{-1}(h), I^2(x)^{-1}(h), \ldots, I^n(x)^{-1}(h)\right)$$

En efecto:

$$I(x)(u_n(x)) = b\left(h, I(f(x))^{-1}(h), \ldots, I^{n-1}(f(x))^{-1}(h)\right)$$

$$u_n(f(x)) = b\left(I(f(x))^{-1}(h), \ldots, I^{n-1}(f(x))^{-1}(h), I^n(f(x))^{-1}(h)\right)$$

$$\operatorname{dist}\left(I(x)(u_n(x)), u_n(f(x))\right) \leq 1/n \operatorname{dist}\left(h, I(f(x))^{-1}(h)\right)$$

Una aplicación

Teor (Bochi-N): Si un cociclo lineal tiene todos sus exponentes de Lyapunov nulos, entonces puede ser perturbado de modo de conjugarlo a un cociclo de rotaciones.

(resultados previos por Ávila-Bochi-Damanik).

Teor (N): Si un difeomorfismo de una superficie tiene todos sus exponentes de Lyapunov nulos, entonces es conjugado a difeomorfismos cercanos a traslaciones.

Conjetura: Esto vale en toda dimensión y bajo la hipótesis de entropía topológica nula.

Moraleja

Si un problema matemático se puede modelar en un espacio de fase a curvatura no positiva, resulta últil pensarlo dinámicamente (acción de (semi)-grupo) .

Moraleja

Si un problema matemático se puede modelar en un espacio de fase a curvatura no positiva, resulta últil pensarlo dinámicamente (acción de (semi)-grupo) .

Si esto es plausible, las nociones de centro y baricentro SIEMPRE aportan información relevante para el problema.

Moraleja

Si un problema matemático se puede modelar en un espacio de fase a curvatura no positiva, resulta últil pensarlo dinámicamente (acción de (semi)-grupo).

Si esto es plausible, las nociones de centro y baricentro SIEMPRE aportan información relevante para el problema.

MUCHAS GRACIAS