"Una Fórmula Maravillosa"

A. Navas[1] - J. Larenas[2]

Para hallar el área de un polígono acostumbrabamos a dividirlo en polígonos más simples, para los cuales conocemos el área. Esta idea, aunque parezca simple, es en realidad bastante profunda. De hecho, es posible (y no muy difícil!) probar que, dados dos polígonos de igual área, podemos dividir cualquiera de ellos en un número finito de triángulos, reensamblarlos y obtener el otro.

Usando esta idea de disección obtendremos una fórmula maravillosa para el área de un polígono P, cuyos vértices poseen coordenadas enteras en un cierto sistema de referencia.

En lo que sigue usaremos la palabra "punto", exclusivamente, para designar puntos del plano de coordenadas enteras. Denotaremos por I_P a la cantidad de puntos interiores de P, y por B_P a la cantidad de puntos del borde.

¿Existe alguna relación entre el área de P con estos números I_P y B_P?

Veamos algunos ejemplos.

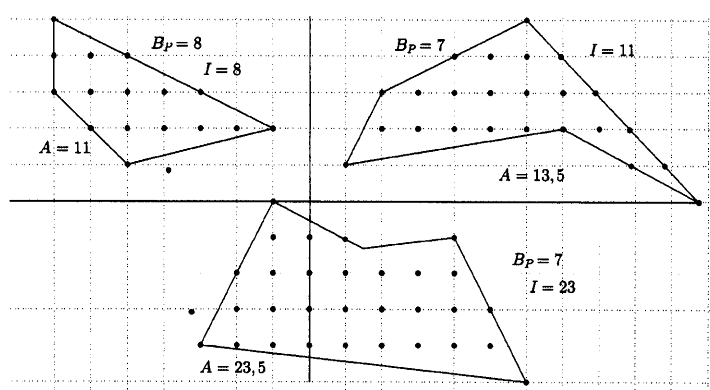

Figura 1.

En cada uno de los ejemplos de la figura 1 vale la igualdad.

[1]Universidad de Santiago de Chile.

[2]Profesor de Estado en Matemática. Colegio Salesianos: La Gratitud Nacional, Liceo Juan Bosco, y Liceo Vespertino N° 1 de Ñuñoa.

$$A_P = I_P + \frac{B_P}{2} - 1\,.$$

¿Es válida esta fórmula para cualquier polígono P?

La respuesta es afirmativa, y a continuación daremos una demostración de ella, usando la idea de disección.

Afirmación 1: Si $P = P_1 \cup P_2$ y la fórmula es válida para P_1 y P_2, entonces es válida para P.

Demostración. Si C es la cantidad de puntos de los lados comunes de P_1 y P_2 es fácil notar que (vea la figura 2):

$$\begin{aligned} I_P &= I_{P_1} + I_{P_2} + (C-2) \\ B_P &= B_{P_1} + B_{P_2} - 2C + 2 \end{aligned}$$

Luego, por hipótesis:

$A_P = A_{P_1} + A_{P_2} = \left(I_{P_1} + \frac{B_{P_1}}{2} - 1\right) + \left(I_{P_2} + \frac{B_{P_2}}{2} - 1\right) =$

$I_P - (C-2) + \frac{B_P + 2c - 2}{2} - 2 = I_P + \frac{B_P}{2} - 1.$

Dejamos al lector probar que si $P = P_1 - P_2$, y la fórmula vale para P_1 y P_2, entonces vale para P.

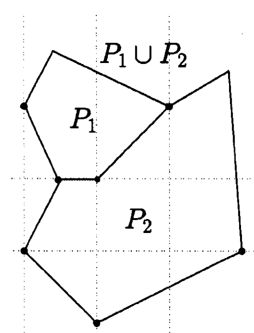

Figura 2.

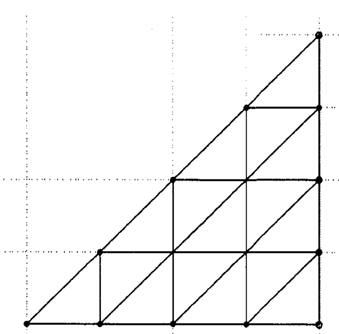

Figura 3.

Afirmación 2: La fórmula vale para un triángulo rectángulo de catetos paralelos a los ejes.

Demostración. Usando disección (vea la Figura 3) vemos que, gracias a la afirmación 1, basta mostrar la fórmula para triángulos rectángulos sin puntos en el borde distintos de los vértices.

Sea $\triangle$ un triángulo con tal propiedad, con m y n puntos sobre sus catetos. Tenemos que:

$$A_{\triangle} = \frac{(m-1)(n-1)}{2}\,.$$

Mientras que $I_{\triangle}$ es igual a la mitad de la cantidad de puntos interiores del rectángulo que duplica a $\triangle$, (vea la figura 4), esto es:

$$I_{\triangle} = \frac{(m-2)(n-2)}{2}\,.$$

Como $B_{\triangle} = m + n - 1$ tenemos:

$$I_{\triangle} + \tfrac{B_{\triangle}}{2} - 1 = \tfrac{mn-2m-2n+4}{2} + \tfrac{m+n-1}{2} - 1 = \tfrac{mn-m-n+1}{2} = A_{\triangle}.$$

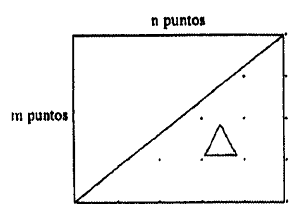

Figura 4.

Afirmación 3: La fórmula vale para rectángulos de lados paralelos a los ejes.
Demostración. Si los lados poseen m y n puntos, entonces:

$$I = (m-2)(n-2)$$

$$B = 2 \cdot [(m-1) + (n-1)]$$

$$A = (m-1)(n-1)$$

Luego:

$$I + \tfrac{B}{2} - 1 = (mn - 2m - 2n + 4) + (m + n - 2) - 1 = (m-1)(n-1) = A$$

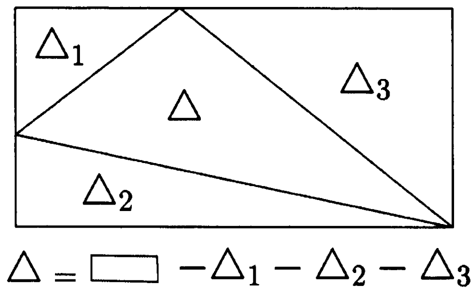

Figura 5

Teorema : La igualdad $A_P = I_P + \frac{B_P}{2} - 1$ es válida para todo polígono P.

Demostración. Dado un polígono P (no necesariamente convexo), no es difícil probar que puede ser dividido en un número finito de triángulos (con vértices de coordenadas enteras). A su vez, un triángulo arbitrario puede ser expresado como unión y diferencia de rectángulos y triángulos rectángulos de catetos paralelos a los ejes (Figura 5). El teorema es, entonces, consecuencia directa de las afirmaciones 1, 2 y 3.

Es interesante notar que tal fórmula puede ser extendida para regiones poligonales que poseen “orificios”. En este caso, designando por O a la cantidad de dichos orificios, vale la fórmula.

$$A = I + \frac{B}{2} + (O - 1) .$$

La demostración no es difícil y se deja que el lector, simplemente, note que una región con O orificios es unión de una región de $O - 1$ orificios y otra de 1 orificio; luego haga un conteo similar al de la afirmación 1, trabajando cuidadosamente con el valor de C.

Problema: Sea p un número primo, $p \neq 2$ y $p \neq 5$. Estudie la expansión decimal de $1/p$. ¿Cuál es su conjetura?