

Numéro d'ordre : 265

Numéro attribué par la bibliothèque : 03ENSL0 265

THÈSE

pour obtenir le titre de
Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon
Discipline : Mathématiques

par

ANDRÉS IGNACIO NAVAS FLORES

Groupes de difféomorphismes du cercle

Soutenue le 08 décembre 2003
au vu des rapports de :

Monsieur DAVE MORRIS WITTE
Monsieur TAKASHI TSUBOI
Monsieur JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

devant la commission d'examen
formée de :

Monsieur THIERRY BARBOT, examinateur
Monsieur DAMIEN GABORIAU, examinateur
Monsieur ÉTIENNE GHYS, directeur
Monsieur PIERRE PANSU, examinateur
Monsieur ALAIN VALETTE, examinateur
Monsieur JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ, rapporteur

A la memoria de Domingo Almendras,
de Jorge Billeke y de Carlos Cid

«Ô mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées, depuis que vos savantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon cœur, comme une onde rafraîchissante... Car le Tout-Puissant s'est révélé complètement, lui et ses attributs, dans ce travail mémorable qui consiste à faire sortir, des entrailles du chaos, vos trésors de théorèmes et vos magnifiques splendeurs».

Les Chants de Maldoror
Lautréamont (Montevideo 1846 - Paris 1870)

Remerciements

Avoir un directeur de thèse comme Étienne Ghys est une chance que je souhaiterais à tout jeune doctorant. La diversité de ses horizons mathématiques, la profondeur de ses idées et la richesse de son intuition ont guidé mon travail de recherche durant ces trois dernières années sur une voie sûre et fructueuse. Mais au-delà de ses incontestables qualités en tant que mathématicien et de toutes les connaissances qu'il m'a fait partager, je le remercie surtout pour sa grande générosité et pour m'avoir toujours rappelé l'importance de la loyauté scientifique, ce qui est parfois oublié dans un milieu aussi compétitif que celui des mathématiques.

Avoir un rapporteur de l'envergure académique de Jean-Christophe Yoccoz est une autre chance que je souhaiterais à tout doctorant. Ce texte s'est nettement amélioré grâce à la révision minutieuse qu'il en a fait, ainsi qu'à ses remarques et aux nombreuses questions qu'il m'a posées tout au long de la révision. Je le remercie énormément.

Je remercie également Dave Morris Witte et Takashi Tsuboi, pour avoir accepté avec enthousiasme de faire un rapport sur cette thèse, ainsi que pour toutes leurs remarques sur ce travail, lesquelles ont permis de clarifier des détails un peu obscurs des premières versions du texte.

Un merci spécial à Alain Valette, qui s'est très tôt intéressé à mon travail, et dont les nombreuses invitations en Suisse Romande ont été l'occasion de découvrir de belles mathématiques (ainsi qu'un beau pays).

Merci aussi à Thierry Barbot, Damien Gaboriau et Pierre Pansu pour m'avoir accordé l'honneur de faire partie du jury, ainsi que pour l'amabilité qu'ils ont toujours eue d'écouter (et parfois même lire) mes élucubrations mathématiques.

L'aide de certains collègues s'est avérée fondamentale dans des passages précis (et décisifs) de ce travail : je remercie Jan Kiwi (lemme 1.3.1), Juan Rivera (proposition 1.8.6), Jean-Christophe Yoccoz (proposition 4.2.2), et surtout Dave Morris Witte (lemme 5.5.3).

Je voudrais remercier également d'autres collègues extérieurs à l'UMPA, tels que Guido Ahumada, Marc Bourdon, Jérôme Buzzi, Serge Cantat, Gilles Courtois, Renato Feres, Pierre de la Harpe, Christophe Kapoudjan, Nicolas Monod, Frédéric Paulin, Vlad Sergiescu et Dennis Sullivan, pour des discussions que nous avons eues autour de différents sujets de ce travail.

Je remercie tous les membres de l'UMPA, spécialement Nalini Anantharaman, Bertrand Deroin, Adolfo Guillot, Victor Kleptsyn, Cyril Lecuire, Ezequiel Maderna, Mickael Pichot, Bruno Sevennec, Jean-Yves Welchinger et Andrej Žuk pour les discussions mathématiques et non mathématiques, Ber-

trand Deroin et Charles Frances pour l'ambiance si conviviale du bureau 433, Tomasz Miernowski et Victor Kleptsyn (pour celle du bureau 428), et Mylène Maïda pour toutes ses corrections linguistiques. Merci à tous ceux qui ont animé des vendredis passionnants autour d'un ballon de foot : Charles Frances, Fanny Levecque, Tomasz Miernowski, Dennis Serre, Jean-Yves Welchinger... Merci également aux secrétaires Virginia et Florence pour la gentillesse qu'elles ont toujours témoigné lors de mes démarches administratives, ainsi qu'à Hervé Gilquin et Gérard Lasseur pour leur soutien informatique constant.

Cette thèse s'est déroulée grâce au financement du gouvernement chilien via une bourse du MIDEPLAN. Je remercie Luz Margarita Lewald pour son aide concernant ce financement. Merci également à Juan Bahamondes, Roberto Geraldo, Erick Inda, Godofredo Iommi, Leonel Guerrero et Carlos Vásquez pour leur agréable et permanente compagnie «virtuelle». Enfin, je remercie tous mes collègues de l'autre côté de l'Atlantique qui m'ont toujours encouragé dans mon travail : Juan Rivera, Jan Kiwi, Sergio Plaza, Rafael Labarca, Rodrigo Bamón, Samuel Navarro, Rubí Rodríguez, Felipe Linares, Carlos Moreira, Marcelo Viana, Waldemar Barrera, Alberto Verjovsky et tant d'autres.

Je ne saurais exprimer ici toute ma gratitude (et bien d'autres sentiments) envers Yamileth.

Résumé. Bien que la dynamique des difféomorphismes (de classe C^2) du cercle soit bien comprise, la dynamique des groupes de tels difféomorphismes est loin d'être claire en général. Par ailleurs, le problème de classifier algébriquement les groupes qui se plongent dans $\text{Diff}_+^2(S^1)$ n'a pas encore été résolu.

Dans la première partie de ce travail nous étudions les groupes de difféomorphismes du cercle qui admettent un système de générateurs proches des rotations. Sous une hypothèse générique, nous donnons la preuve complète d'un résultat de G. Duminy : dans cette situation, il n'y a pas d'ensemble fermé invariant et minimal du cercle homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

Dans la deuxième partie nous nous intéressons aux groupes résolubles et moyennables de difféomorphismes de l'intervalle. Pour les premiers nous donnons une classification dynamique complète, tandis que pour les seconds nous donnons une description d'une famille assez large. Ces résultats montrent en quelque sorte le caractère spécial du groupe F de Thompson (pour lequel le problème de la moyennabilité reste ouvert).

La dernière partie est consacrée à des phénomènes de rigidité. Nous démontrons notamment que les seuls sous-groupes de type fini du groupe des difféomorphismes du cercle qui vérifient la propriété (T) de Kazhdan sont les sous-groupes finis.

Abstract. The dynamics of single circle diffeomorphisms is well understood. However, the dynamics of groups of such diffeomorphisms is in general far from being clear. On the other hand, the problem of the algebraic classification of groups that can be embedded in $\text{Diff}_+^2(S^1)$ remains unsolved.

In the first part of this work, we study the groups of circle diffeomorphisms generated by elements which are near to rotations. Under a generic hypothesis, we give the complete proof of the following result by G. Duminy : in such a case, there is no invariant minimal set of the circle homeomorphic to the Cantor set.

In the second part, we study solvable and amenable groups of diffeomorphisms of the interval. For the formers we give a complete dynamical classification, and for the latters we give a description of a large family. These results show in some way the special feature of Thompson's group F (for which the problem of amenability remains open).

The last part is about some rigidity phenomena. We prove in particular that the only finitely generated subgroups of the group of circle diffeomorphisms which satisfy Kazhdan's property (T) are the finite ones.

Mots clés. Difféomorphismes du cercle, actions de groupes, résoluble, moyennable, propriété (T) de Kazhdan, rigidité.