Para Ahorrarse unos Cálculos

Andrés Navas

Departamento de Matemática y C.C.
Universidad de Santiago de Chile

Generalmente se piensa que esto evidencia falta de capacidad matemática del alumno, lo cual es bastante discutible, pues es posible que él tenga claro el concepto de multiplicación (que es lo importante), y su problema sea sólo de memorización.

Cuando a un alumno de una escuela básica se le pregunta el resultado de una multiplicación es común que reconstruya en su mente la tabla completa hasta llegar al producto pedido. Así, para llegar, por ejemplo, al valor de $6 \cdot 8$, comenzará por $6 \cdot 1$, $6 \cdot 2$, $\ldots$, lo que significará que deberá realizar 8 operaciones.

Generalmente se piensa que esto evidencia falta de capacidad matemática del alumno, lo cual es bastante discutible, pues es posible que el tenga claro el concepto de multiplicación (que es lo importante), y su problema sea sólo de memorización. Además, este proceso de repetir una misma operación la utilizamos todos los matemáticos, a veces sin pensar en la manera óptima de llegar al resultado.

Pensemos, por ejemplo, en potencias: para calcular el valor de a^n todos procedemos como "el alumno sin capacidad matemática" y hacemos

$$a^n = a \cdot a \cdots a,$$

lo que nos lleva a n multiplicaciones. Observe que aquí los números crecen rápidamente, por lo que cada operación requiere de mucho tiempo y energía, incluso para un computador.

¿Es posible acortar este proceso?

Una idea para esto es la siguiente: si queremos calcular, por ejemplo, 3^8, hacemos $3^8 = (3^4)^2$, y el problema se reduce a calcular 3^4. En general, si el exponente no es una potencia de 2 recurrimos a las relaciones.

$$\begin{aligned} a^{2n+1} &= a \cdot a^{2n} \\ a^{2n} &= (a^n)^2 \end{aligned}$$

Así, para calcular 5^7 hacemos

$$5^7 = 5 \cdot 5^6, \quad 5^6 = (5^3)^2, \quad 5^3 = 5 \cdot 5^2, \quad 5^2 = 5 \cdot 5$$

y sólo debemos realizar 4 operaciones.

Es natural preguntarse ¿cuál es el número de operaciones $\sigma(n)$ que son necesarias según este nuevo método? La clave está en la expresión de n en base 2.

$$n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_k}, \qquad \text{con} \qquad n_1 > n_2 > \cdots > n_k\,.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\sigma(1) &= 0 \\
\sigma(2n) &= 1+\sigma(n) \quad (\text{ pues } a^{2n}=a^n\cdot a^n) \\
\sigma(2n+1) &= 1+\sigma(2n) \quad (\text{pues } a^{2n+1}=a\cdot a^{2n}).
\end{aligned}$$

A partir de esto no es difícil concluir que

$$\sigma(n)=n_1+k-1\,.$$

(Usted puede demostrar esto por inducción.)

Ahora, note que $n_1\geq k-1$, por lo que $\sigma(n)\leq 2n_1$. Además, $n_1\leq \log_2(n)$. Por lo tanto,

$$\sigma(n)\leq 2\log_2(n)\,,$$

y este número es inmensamente menor a n, para n grande. Luego, les hemos evitado muchos cálculos a nuestro computador, nuestra calculadora o nuestras neuronas.

Problema. Sea $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ una función definida recursivamente por $f(1)=a$, $f(2n)=(f(n))^2$, $f(2n+1)=bf(2n)$. Calcule el valor de $f(1)\cdot f(2)\cdots f(2^2-1)$.

¿Para qué sirven los Sistemas NO Posicionales?

Ignacio Barradas
Centro de Investigación en Matemática, CIMAT, México

Corina Saénz
Facultad de Matemáticas, Universidad de Guanajuato, México

Hoy en día resulta difícil imaginarse que la gente tenía números y no sabía que se podían hacer operaciones con ellos, pero así fue. Aunque el sistema indoarábigo de representación de números se inventó antes de Cristo, los algoritmos actuales para hacer operaciones aritméticas son de muy reciente creación...