# Una introducción a la dinámica de homeomorfismos de superficies vía la teoría de Brouwer

Andrés Navas
Universidad de Santiago de Chile

El objetivo de estas notas es presentar una introducción a la dinámica de los homeomorfismos en dimensión 2. Pese a que las demostraciones de los resultados de esta teoría tienen un contenido geométrico bastante claro, ellas son en general muy extensas y elaboradas. Es por ello que hemos preferido una presentación más bien informal, centrada en las ideas, y en la que muchos argumentos aparecen bosquejados en las numerosas figuras del texto, quedando algunas de las demostraciones a cargo del lector. Además, para simplificar la exposición, sólo consideraremos homeomorfismos que preservan orientación.

Comenzamos estas notas centrándonos en el trabajo de Brouwer sobre los homeomorfismos del plano sin puntos fijos. Luego abordamos la versión moderna (debida a Franks) del teorema de Poincaré-Birkhoff sobre la existencia de puntos fijos para ciertos homeomorfismos del anillo. Finalmente, estudiamos las diferentes nociones de "números de rotación" para homeomorfismos del toro desde los puntos de vista dinámico y medible. Un tópico que no abordaremos, en parte por estar muy bien desarrollado en las referencias clásicas [5] y [23], es el de la clasificación de Thurston de los homeomorfismos de superficies en homeomorfismos periódicos, reducibles y pseudo-Anosov. Señalemos sin embargo que los temas que nosotros tratamos no han sido desarrollados sistemáticamente en un texto guía, lo cual fue una de las motivaciones para la elaboración de estas notas. La otra motivación, inherente a la teoría en sí misma, dice relación con el rebrote que ésta ha cobrado en los últimos años, debido por una parte a los notables trabajos de Franks, Handel y Le Calvez, y por otro lado a sus posibles aplicaciones en una eventual solución de la renombrada "conjetura de Zimmer" para el caso bidimensional.

La lista de referencias dada al final de este texto dista muchísimo de ser exhaustiva. A ella podrían agregarse por ejemplo las notas de los cursos dictados con ocasión de la Escuela de verano 2006 del Instituto Fourier de Grenoble, las cuales están disponibles en internet (www.fourier.ujf-grenoble.fr). Esperamos que el lector interesado pueda utilizar todo este material como una "puerta de entrada" a la elegante teoría que pasamos a revisar.

# 1. El teorema de traslación de Brouwer: homeomorfismos libres del plano

A principios del siglo XX, Brouwer se interesó en los homeomorfismos del plano que son *libres*, es decir que *no poseen puntos fijos*. En particular, en 1909 creyó haber demostrado que dichos homeomorfismos son siempre topológicamente conjugados a traslaciones (no triviales). Sin embargo, el propio Brouwer percibió rápidamente un error en sus argumentos, y exhibió como contra-ejemplo a su "teorema" el homeomorfismo $h$ esbozado en la figura 1. Observe que dicho homeomorfismo es el tiempo 1 de un flujo en el plano.

**Ejercicio 1.1.** Pruebe que $h$ no es topológicamente conjugado a ninguna traslación del plano.

**Sugerencia.** Considere la transversal $L$ indicada en la figura 1. Verifique que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $h^n(L) \cap L \neq \emptyset$ y concluya lo afirmado.

**Ejercicio 1.2.** Dé un ejemplo de un homeomorfismo libre del plano que no sea el tiempo 1 de ningún flujo topológico.

Diremos que un abierto simplemente conexo $D$ es un *dominio de traslación* de un homeomorfismo libre $h$ si el borde de $D$ lo componen dos rectas topológicas propiamente incrustadas y de la forma $\ell$ y $h(\ell)$, de modo que $\ell$ divide el plano en dos componentes conexas y para cada $p \in D$ se tiene que $p$ y $h^{-1}(p)$ pertenecen a distintas componentes. Con esta terminología, el genuino "teorema de traslación de Brouwer" estipula que si $h$ es un homeomorfismo libre del plano, entonces todo punto está contenido en algún dominio de traslación (vea la figura 2 para algunas ilustraciones).

**Ejercicio 1.3.** Suponga que $h$ es un difeomorfismo libre del plano que es el tiempo 1 del flujo asociado a un campo de vectores sin singularidades. Usando el teorema de Poincaré-Bendixon, pruebe que cualquier curva integral $\ell$ asociada a un campo ortogonal al campo original delimita junto con $h(\ell)$ un dominio de traslación para $h$.

## 1.1. Un criterio para la existencia de puntos fijos

Consideremos la situación esbozada en la figura 3. En ella, $\Omega$ es un disco topológico cerrado y $f : \Omega \to f(\Omega)$ es un homeomorfismo. La región $J$ es una de las componentes conexas de la intersección entre $\Omega$ y $f(\Omega)$. Los segmentos de arco del tipo $\alpha$ serán llamados *arcos de desborde*. A cada $\alpha$ corresponde un arco $\beta = \beta_\alpha$ contenido en $\partial f(\Omega)$, de modo que $\alpha \cup \beta$ es el borde de un disco topológico $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$.

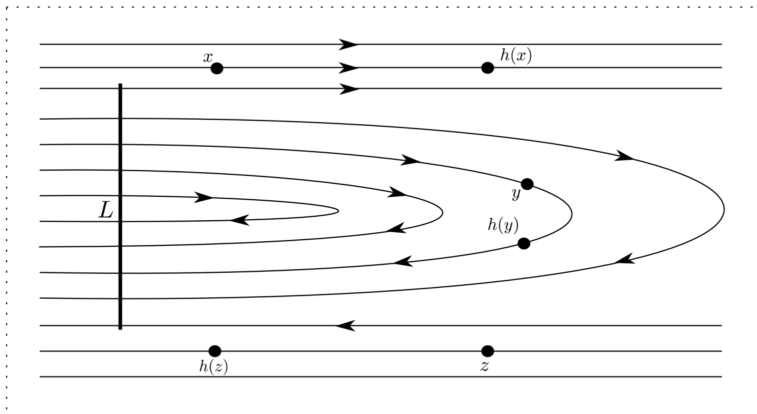


Figura 1: el homeomorfismo $h$

**Proposición 1.4.** *Con las notaciones precedentes, si para todo arco de desborde $\alpha$ se tiene $f(\alpha) \not\subset \beta_\alpha$ y $\beta_\alpha \not\subset f(\alpha)$, entonces $f$ posee al menos un punto fijo en $J$.*

**Demostración.** Para cada región $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$ podemos escoger una retracción $H^\Delta$ de $\Delta$ sobre $\alpha$, es decir una aplicación continua $H^\Delta : \Delta \to \alpha$ que restringida a $\alpha$ sea la identidad. Observe por otro lado que las hipótesis de la proposición implican que si $f(\alpha) \cap \beta_\alpha \neq \emptyset$, entonces una de las situaciones ilustradas en la figura 4 ocurre. Por lo tanto, podemos escoger $H^\Delta$ satisfaciendo la propiedad suplementaria de enviar cada componente de $f(\alpha) \cap \beta$ sobre su punto de intersección con $\alpha$. Al "juntar" todas las aplicaciones $H^\Delta$ obtenemos una aplicación continua $H$ de $f(J)$ en $J$, la cual viene formalmente definida por

$$H(x) = \begin{cases} H^\Delta(x) & \text{si } x \text{ pertenece a alguna región } \Delta = \Delta(\alpha, \beta), \\ x & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El teorema del punto fijo de Brouwer (vea [2] para una demostración elemental de este teorema) es por lo tanto válido para la aplicación $H \circ f : J \to J$. Sin embargo, se comprueba fácilmente que, dadas las hipótesis y la construcción de $H$, todo punto fijo de $H \circ f$ es en realidad un punto fijo de $f$. □

Observe que las hipótesis $f(\alpha) \not\subset \beta_\alpha$ y $\beta_\alpha \not\subset f(\alpha)$ son necesarias para la validez de la proposición anterior, tal como lo muestran los ejemplos de la figura 5.

En algunas situaciones, para obtener resultados de multiplicidad de puntos fijos (*i.e.* existencia de al menos dos de tales puntos), será necesario hacer un estudio detallado del

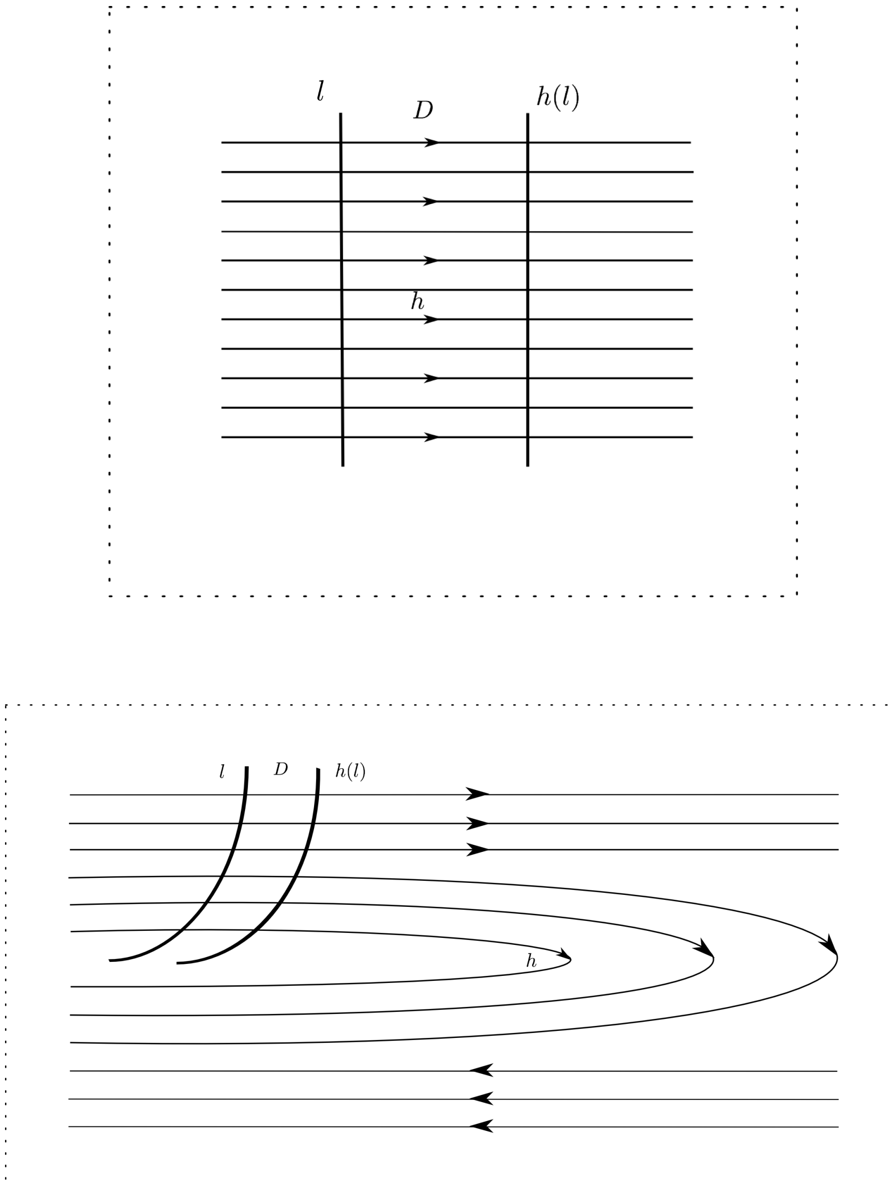


Figura 2: ejemplos de dominios de traslación

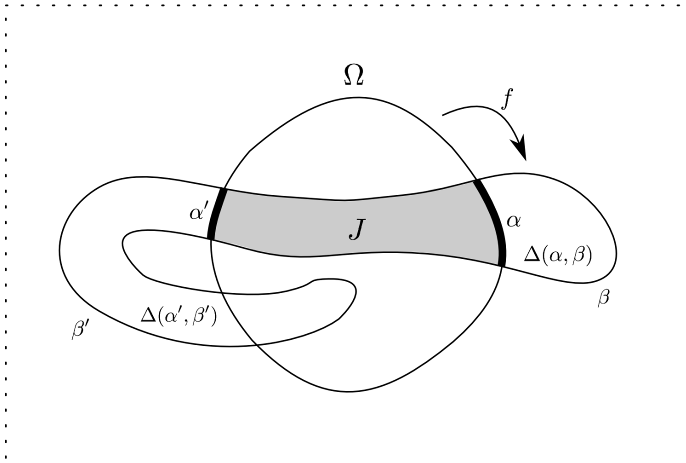


Figura 3: un criterio para hallar puntos fijos

*índice* de ellos. Para esto recordemos primeramente que si $f$ es un homeomorfismo definido en un disco topológico cerrado de borde $\gamma$ de modo que $f$ no posee puntos fijos sobre $\gamma$, entonces tiene sentido considerar la aplicación de $\gamma$ sobre $\mathrm{S}^1$ dada por

$$x \mapsto \frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|}.$$

Como $\gamma$ es una curva cerrada simple, ella puede ser positivamente parametrizada por el círculo. Por lo tanto, la aplicación definida anteriormente induce una nueva aplicación (continua) del círculo sobre sí mismo. Definimos entonces el *índice* $Ind(f,\gamma)$ *de* $f$ *a lo largo de* $\gamma$ como siendo el grado topológico de esta última aplicación (es decir, el número algebraico de vueltas sobre el círculo que recorre la imagen cuando la preimagen recorre exactamente una vuelta en el sentido positivo).

El índice es invariante bajo homotopías "que no pasan sobre puntos fijos". De manera más precisa, para toda deformación continua $\gamma_t$ de la curva original $\gamma = \gamma_0$ satisfaciendo $f(\gamma_t(s)) \neq \gamma_t(s)$ para todo $s, t$ se cumple

$$Ind(f,\gamma) = Ind(f,\gamma_1).$$

A partir de lo anterior, el lector no debiese tener dificultad en verificar que si $\Omega$ es un disco topológico cerrado y $f : \Omega \to f(\Omega)$ satisface $f(\Omega) \subset int(\Omega)$, entonces $Ind(f,\partial\Omega) = 1$. Además, si $f(\Omega) \subset \Omega$ y $f$ no posee puntos fijos sobre $\partial\Omega$, entonces aún se tiene la igualdad $Ind(f,\partial\Omega) = 1$.

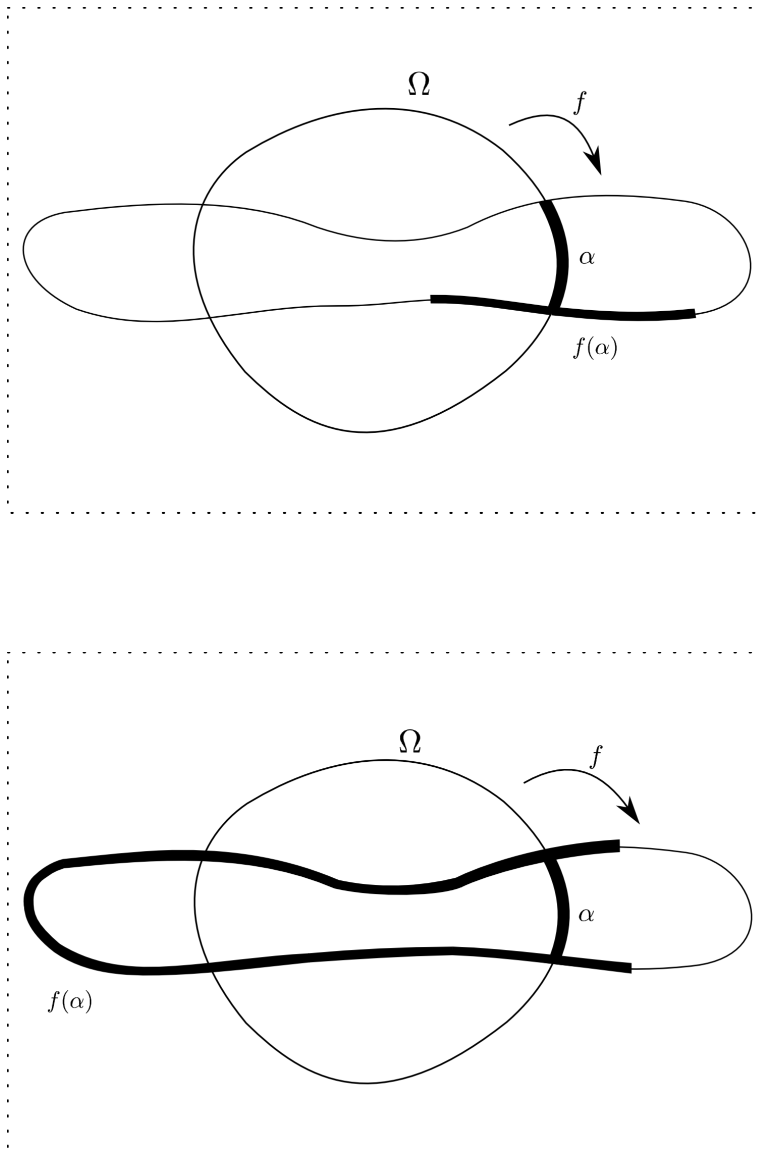


Figura 4: ilustración de las hipótesis de la proposición 1.4