El Teorema de Pitágoras vía triángulos equiláteros

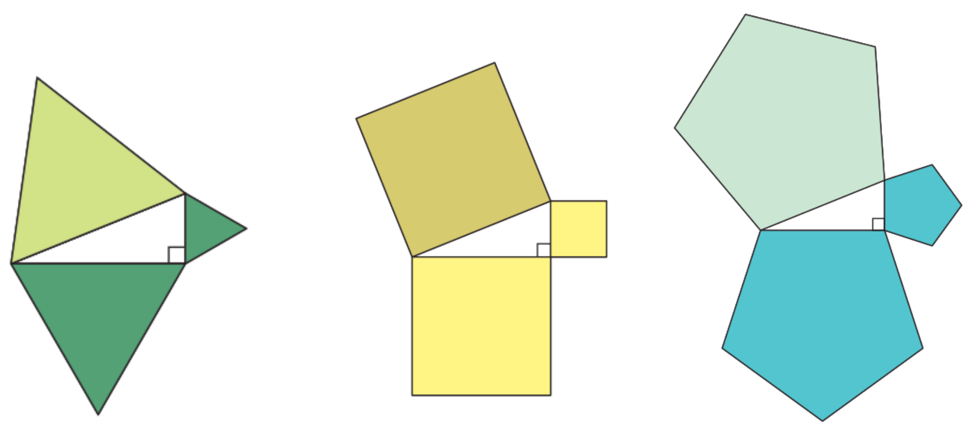
Andrés Navas

El de Pitágoras es muy probablemente el teorema más importante de la matemática básica, y muchas demostraciones para él son conocidas. Además de la original, hay una contenida en el Jiuzhang Suanshu, un antiguo texto chino que es relativamente contemporáneo a Pitágoras [1]. Otra demostración es atribuida a Leonardo da Vinci [2], y otra es debida al presidente de EE.UU. James Gardfield [3]. El lector encontrará en [4] una lista de 116 demostraciones diferentes, con comentarios y enlaces a otras pruebas.

En este texto proponemos aún una demostración más, la cual tiene la virtud de no ser estándar pues no usa cuadrados ni semejanza de triángulos. Para motivarla, sean a, b los catetos de un triángulo rectángulo y c su hipotenusa. De la igualdad

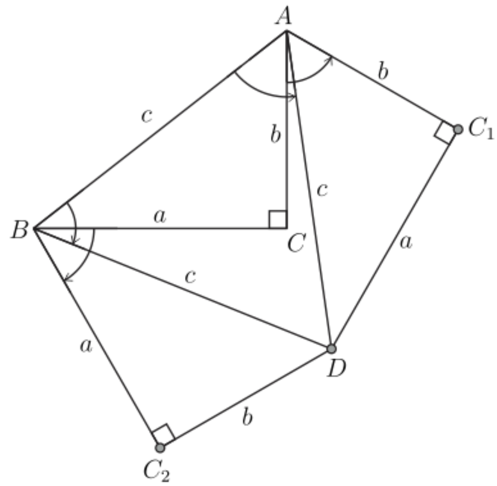
$$a^2 + b^2 = c^2$$

se sigue rápidamente que el área de un n-ágono regular de lado c es la suma de las áreas de dos n-ágonos regulares de lados a y b respectivamente. Para ver esto, basta multiplicar ambos miembros de la igualdad anterior por una constante apropiada (a saber, el área del n-ágono regular de lado 1). De hecho, este enunciado para un $n \geq 3$ fijo también implica (y por lo tanto es equivalente) al teorema de Pitágoras simplemente revirtiendo este argumento.

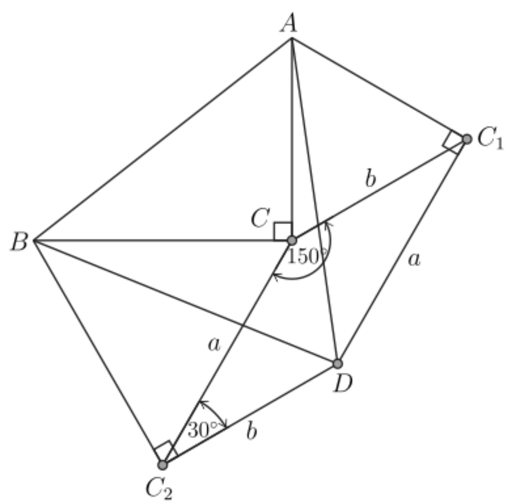


En [5], Kassie Smith plantea el problema de hallar una prueba más geométrica de todo esto. Ciertamente, en este contexto podría aplicarse el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien [6], según el cual debiese haber una descomposición de los n-ágonos regulares pequeños en piezas poligonales que, al ser reensambladas, nos dan el n-ágono grande. Sin embargo, el número de piezas requeridas podría ser demasiado grande.

A continuación, proponemos una prueba geométrica muy corta del enunciado de arriba para triángulos equiláteros usando una bonita configuración que al parecer había sido desapercibida. Para comenzar, sean A, B, C los vértices del triángulo. Rotemos el triángulo ABC en 60^o en sentido anti-horario haciendo centro en A, y en 60^o en sentido horario con centro en B. Denotemos C_1, B_1 y C_2, A_2 las imágenes de los vértices obtenidos, tal como se muestra en la figura abajo. Observe que $BA_2 = c = AB_1$ y $\angle ABA_2 = \angle BAB_1 = 60^o$. Por lo tanto, A_2 y B_1 coinciden, y si denotamos D dicho punto, entonces A, B y D son los vértices de un triángulo equilátero de lado c.



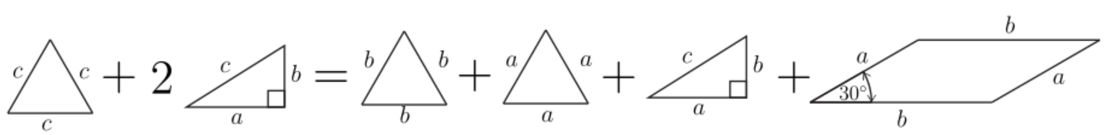
Notemos además que BCC_2 y ACC_1 son triángulos equiláteros de lados a y b respectivamente. Más aún, los triángulos BC_2D y AC_1D son ambos congruentes al triángulo BCA.



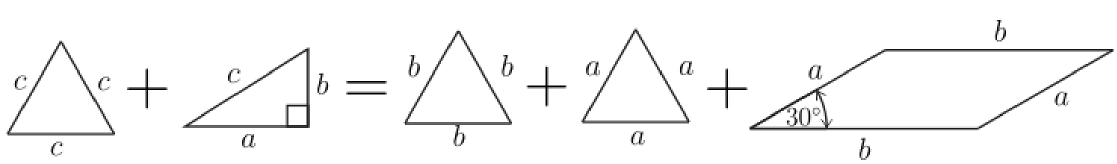
Considerando ahora las áreas de las piezas involucradas, tenemos

$$ABC_2DC_1 = ABD + BC_2D + AC_1D = ACC_1 + BCC_2 + BCA + C_2DC_1C.$$

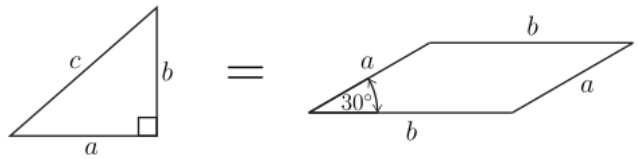
De manera más pictórica,



lo cual nos da



Hemos reducido entonces el problema a probar que

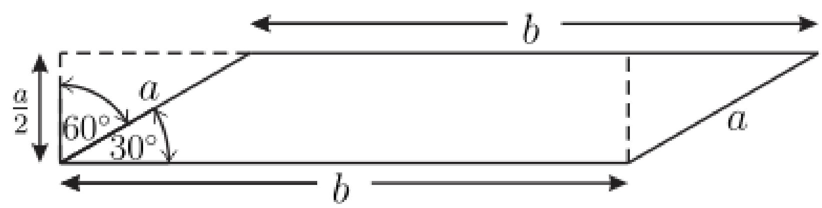


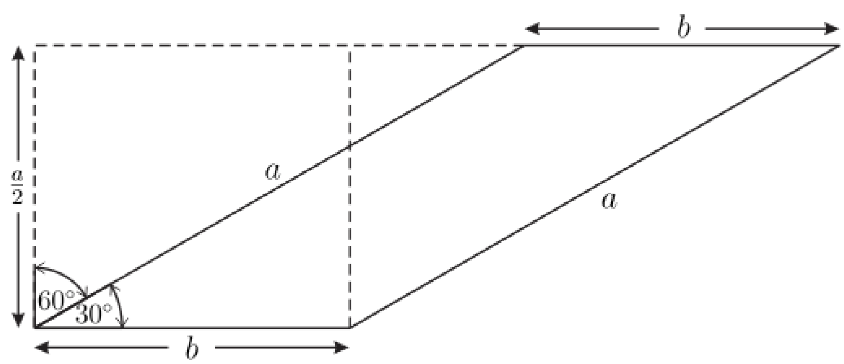
Para esto, observe que C_2DC_1C es un paralelógramo de lados a y b. Además, como $\angle BCA = 90^o$, necesariamente $\angle C_1CC_2$ debe ser igual 120^o, por lo que $\angle CC_2D = \angle DC_1C = 30^o$. Por lo tanto,

$$C_1CC_2D = ab\,\mathrm{sen}(30^o) = \frac{1}{2}ab = BCA,$$

tal como deseábamos.

Observación. Ciertamente, en el último paso de arriba podemos evitar el uso de la trigonometría con tan solo observar las figuras a continuación...





REFERENCIAS

[1] https://math.temple.edu/∼zit/Zitarelli/Pythag_Chinese.pdf.
[2] http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/∼hb3/publ/vinci-0.pdf.
[3] http://math.kennesaw.edu/∼sellerme/sfehtml/classes/math1112/garfieldpro.pdf.
[4] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/.
[5] http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Fa2012/Smith/6690/pythagorean%20theorem/KLS_Pythagorean_Theorem.html.
[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Wallace%E2%80%93Bolyai%E2%80%93Gerwien_theorem.

Andrés Navas (andres.navas@usach.cl)
Dpto. de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile
Alameda 3363, Santiago, Chile