

Algunas consideraciones geométricas sobre el diseño de la bandera de la Independencia de Chile

Andrés Navas*

Resumen: Establecemos un modelo del que debe haber sido el diseño geométrico original de la bandera de Chile, utilizada el día del juramento de la Independencia (12 de Febrero de 1818). Para esto, seguimos un raciocinio basado en la Matemática, descartando errores conceptuales de estudios pre-existentes sobre el tema.

Abstract: We give a model for the geometric design of the original Chilean flag, used during the ceremony of the Independence (February 12, 1818). To do this, we argue from the mathematical viewpoint, thus correcting several mistakes spread out along the literature on the subject.

Palabras clave: bandera chilena, Independencia de Chile, geometría, razón áurea.

Keywords: Chilean flag, Chilean Independence, geometry, golden proportion.

Introducción

Si bien el diseño original de la bandera chilena de la Patria Nueva, aquélla que fue concebida en tiempos de la Independencia, ha sido materia de estudio en varios tratados, la mayoría de éstos apunta a su simbolismo, y ninguno aporta un estudio acabado y correcto de su diseño geométrico. Las razones de esto son múltiples. Recordemos primeramente que no se dispone de ningún documento oficial en el que se explique la configuración de la bandera. Se sabe, sin embargo, quién la diseñó (Antonio Arcos, aunque hay quienes señalan a Gregorio de Andía y Varela) y quién confeccionó el único ejemplar que hoy se conserva, usado el día de la ceremonia del juramento de la Independencia (Dolores Prats de Huici, si bien algunos mencionan a las hermanas Pineda de Concepción).

Al no haber ningún patrón de reproducción, el estudio se ha basado en mediciones efectuadas a este único ejemplar (a las que nos referiremos en lo que sigue simplemente como las “mediciones” y las correspondientes “medidas”), preservado en el Museo Histórico Nacional. Lamentablemente, esto ha conllevado a algunos errores de apreciación e interpretación, al pasar por alto instancias tales como:

- 1) El que, aunque el diseño hubiese sido conceptualmente correcto, las instrucciones pueden haber sido incorrectas en términos cuantitativos. En efecto, tal como mostraremos más adelante, el diseño corresponde a una construcción geométrica que requiere del cálculo de funciones de relativa complejidad. Los valores de estas funciones son fácilmente determinables hoy en día mediante el uso de una calculadora científica estándar. Sin embargo, en la época, tales valores estaban disponibles en formato de libros, denominados “tablas”, que muy a menudo contenían errores.

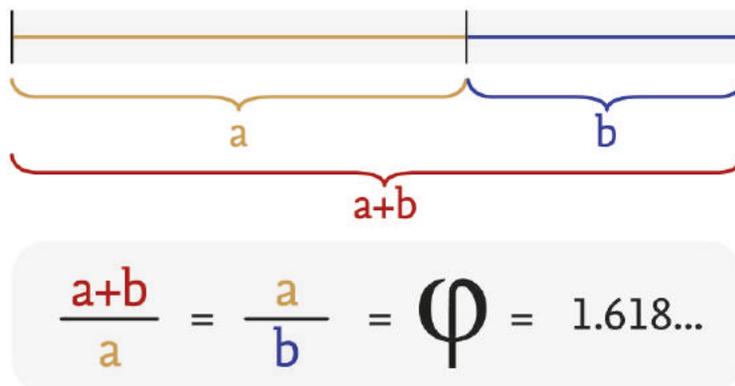
* Doctor en Matemáticas, École Normale Supérieure de Lyon
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile
Presidente de la Sociedad de Matemática de Chile

- 2) El que en la misma elaboración de la bandera se puede haber cometido errores en la confección y el posicionamiento de sus elementos.
- 3) El que la bandera ha sido sometida a numerosas restauraciones, de las cuales no existe un historial completo, y en las que sus proporciones y el posicionamiento de sus distintas componentes han sido modificados, sin respetar una eventual concepción original debido, en parte, al desconocimiento de ésta.

Aún así, el ejemplar del que se dispone permite llegar a algunas conclusiones interesantes. Originalmente, fue Gastón Soublette quien lúcidamente vio aparecer la división áurea en varias partes del diseño (Soublette, 1984), un elemento no visualizado en estudios anteriores (Valencia Avaria, 1974). Sin embargo, Soublette no logró desentrañar completamente la configuración, e incurrió en varios errores que han sido reproducidos en textos posteriores (Manzo, 2011) y que es propicio corregir.

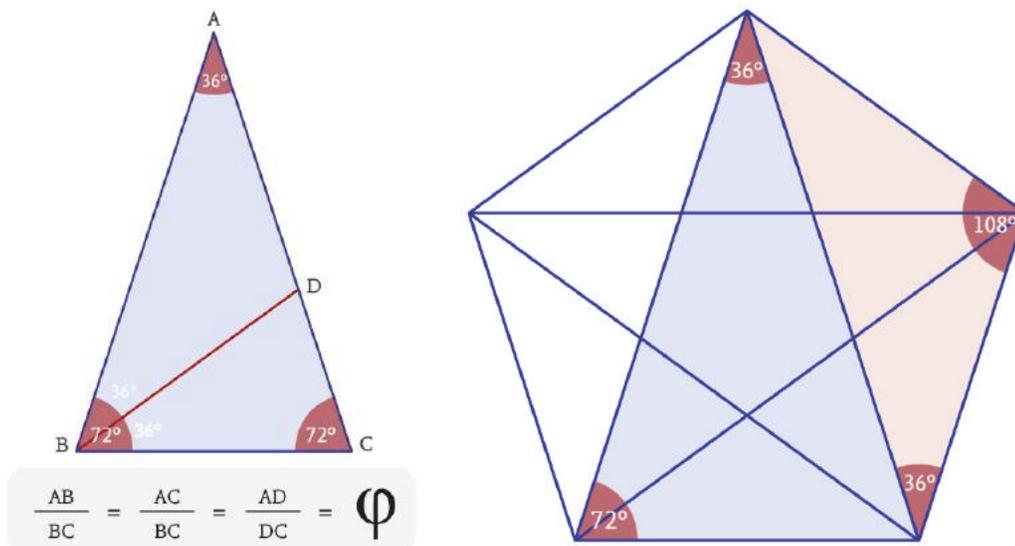
La división áurea

El llamado *número de oro* es usualmente denotado con la letra griega φ (léase “fi”) y tiene el valor $(\sqrt{5}+1)/2 \sim 1,618\dots$ Muy probablemente, es el más hermoso de todos los números. Esta afirmación puede ser justificada a partir de la ciencia misma, aunque resulta mucho más inspirador hacerlo desde nuestro entorno, pues dicho número es omnipresente en la naturaleza. La disposición de las hojas en las plantas (filotaxis), la proporción entre diversas partes del cuerpo humano, la forma de las caracolas de mar, etc., obedecen a patrones ligados a este número. A menudo esto se debe a que en los procesos biológicos rigen leyes de auto-replicación con los cuales φ está intrínsecamente relacionado. En efecto, este número corresponde a la proporción en la que debe ser dividido un trazo para que el todo sea a la parte más grande como ésta es a la más pequeña. De esta manera, el número de oro corresponde a algo así como un punto de equilibrio al pasar de una escala mayor a otra más chica: φ es considerado entonces como “el número de la armonía”.



Existen diversos métodos para conseguir una división áurea, pero tal vez el más sencillo está dado por el denominado “triángulo mágico”, aquél de dos ángulos de 72° y uno de 36° . En él, la proporción de los lados mayores respecto del menor es necesariamente igual a φ . Además, si se divide un ángulo de 72° en dos de 36° ,

entonces la proyección en el otro lado determina también una división áurea. El número de oro aparece así estrechamente ligado a un pentágono regular, pues los triángulos mágicos emergen de él al trazar las diagonales, dando origen a la estrella simétrica de cinco puntas.



Se tiene antecedentes de la división áurea desde las tablas sumerias del 3200 a.C., en las que aparece asociada a varios pentagramas. Posteriormente, los antiguos griegos lograron comprender de manera sistemática la importancia de φ y su efecto estético, tanto así que lo implementaron en muchas de sus magnas construcciones, como el Partenón de Atenas. De hecho, la notación φ se estableció en honor a Fidias, creador de varias de las esculturas del templo. Pero quien hizo de la división áurea una pequeña joya de la cultura en Occidente fue el monje matemático Luca Pacione a través de su libro *La Divina Proportione* (1509). Esta preciosa obra está ilustrada por Leonardo da Vinci, quien incorporó la proporción áurea en la mayoría de sus pinturas. Desde entonces, ha sido constantemente usada por arquitectos, diseñadores y artistas, como por ejemplo Salvador Dalí y Le Corbusier.

Si bien la noción de la división áurea, así como sus propiedades más conocidas, son (o debiesen ser) material estándar en los estudios de liceo, en la época a la que nos referimos (fines del siglo XVIII e inicios del XIX) eran conocimiento solamente de las elites más ilustradas, valorado muy especialmente en los círculos masónicos.

Diseño geométrico de la bandera de la Independencia

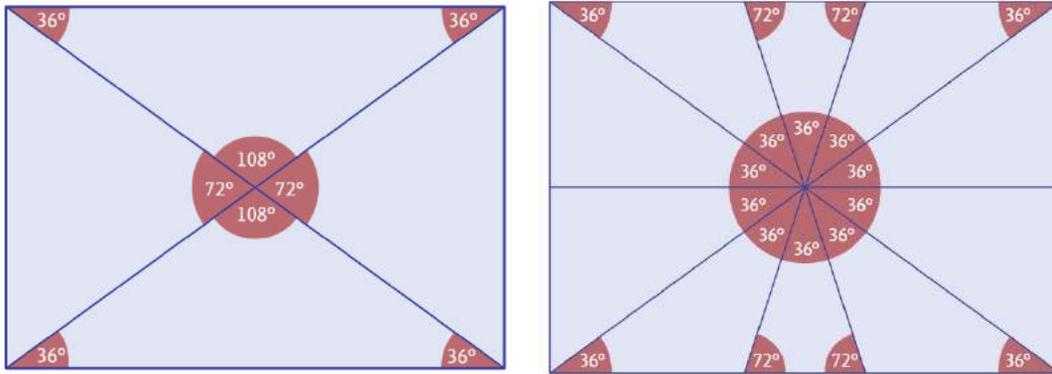
Como es bien conocido, la bandera de la Independencia tiene varios elementos que la diferencian de la que usamos hoy en día, establecida definitivamente por un decreto oficial de 1912. Primeramente, consta de dos escudos diferentes al centro (uno por cada lado). Por otra parte, incorpora –dentro de la estrella pentagonal– una de ocho

puntas, la *guñelve*, que en la tradición mapuche representa al planeta Venus y que fue usada por Lautaro en su pendón de guerra.

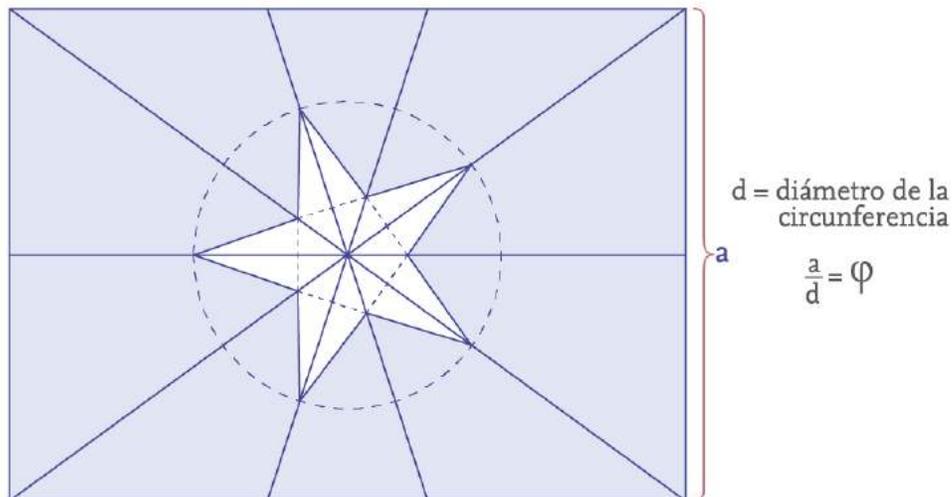
Sin embargo, no nos referiremos a estos aspectos, sobre los cuales no tenemos absolutamente nada nuevo que aportar. Nuestro propósito es centrarnos en las dimensiones de la bandera desprovista de estos elementos (es decir, reducida a sus campos blanco, azul y rojo, además de la estrella de cinco puntas) y explorar las diferencias que aún subsisten con la actual en lo que se refiere a sus dimensiones. En efecto, tal como vislumbrara Soubllette, éstas hacen aparecer la razón áurea. Sin embargo, los argumentos esgrimidos en la Introducción nos mueven a la cautela: un análisis más profundo no debiese ceñirse exclusivamente a las medidas del ejemplar que subsiste, pues de lo contrario se puede cometer (y de hecho, han sido cometidos) errores de apreciación e interpretación importantes. Por lo mismo, hemos decidido descartar parcialmente dichas medidas –disponibles en versión aproximada en (Martínez, Rivera, Campos, Mellado, 2010)– y plantear un proceso de abstracción puramente matemático. Como veremos, este ejercicio nos permitirá desentrañar completamente el diseño de la bandera, el cual es de una originalidad y elegancia geométricas sorprendente.

Soubllette está absolutamente acertado al afirmar que todo el diseño de la bandera está supeditado al del campo azul y su estrella. Sin embargo, al basarse únicamente en mediciones y disquisiciones de carácter simbólico, comete un grave error, reproducido más tarde por Manzo, al postular que la proporción entre el alto y el ancho del campo azul es de 3 a 4, es decir 0,75. En efecto, dicha afirmación no tiene ninguna coherencia desde el punto de vista geométrico, pues la proporción entre su alto y su largo debe ser tal que el ángulo que subtienden las diagonales hacia los lados mayores sean iguales a 36° . De este modo, los ángulos centrales a izquierda y derecha determinados por las diagonales son iguales a 72° , es decir, la quinta parte de una circunferencia completa, lo cual se ajusta a la geometría pentagonal a la que se aspira. Para que esto ocurra, la proporción entre el alto y el ancho del campo azul debe ser igual a la tangente de 36° , es decir, $\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}} = 0,72654\dots$

Es en este punto donde vemos una posible aparición de la triple causal de equivocación descrita en la Introducción: además de posibles errores en la confección o cambios ligados a las restauraciones, cabe consignar que el valor de la tangente de 36° no es fácilmente calculable sin la ayuda de instrumentos tecnológicos modernos, por lo que es probable que incluso la instrucción original haya sido incorrecta desde el punto de vista cuantitativo, aunque acertada conceptualmente.



Una vez esclarecido este aspecto, observe que los ángulos que quedan en la intersección de las diagonales apuntando hacia arriba y abajo son de 108° , que al ser divididos cada uno en tres partes iguales de 36° nos determinan dos pares de triángulos mágicos. Si se traza ahora la horizontal media del campo azul, por el centro del rectángulo pasarán cinco líneas que forman consecutivamente ángulos de 36° . De esta forma, eligiendo alternadamente cinco puntos en estos trazos sobre una circunferencia basada en el centro, se obtienen los vértices de una estrella pentagonal totalmente regular.



En este punto cabe hacer una consideración mayor: la aparición de las razones áureas en el resultado final de la configuración del campo azul no es azarosa ni tampoco forzada, sino que fluye de la estrella pentagonal debido a la presencia de los triángulos mágicos (agreguemos a esto que los lados de los ángulos centrales de 36° cortan a los segmentos horizontales superior e inferior en razón áurea). De esta forma, la geometría de este campo no está concebida en función del número de oro, sino más bien en términos de la geometría pentagonal, de la cual las secciones áureas emergen naturalmente.

Otro aspecto que resulta pertinente discutir es el de la inclinación de la estrella. Se ha especulado mucho a este respecto, ya sea otorgándole un carácter simbólico de dinamismo o bien señalando que estaba pensada de manera tal que al exhibir la bandera verticalmente –tal como se acostumbraba hacer en las festividades públicas– la estrella apareciese erguida. Sin embargo, lo cierto es que desde una perspectiva matemática, la explicación es muchísimo más simple: la configuración de ángulos centrales de 72° sólo opera de la manera anteriormente expuesta, y por lo tanto no existía mayor alternativa para la posición de la estrella. Coincidimos así con Soublette en que “dicha posición es más bien un resultado de la construcción geométrica que un punto de partida puramente práctico”.

Resta, sin embargo, un punto a discernir, a saber, el tamaño de la estrella. Lamentablemente, no se puede dilucidar este aspecto, pues contrariamente a lo que señala Soublette, la configuración exhibida sólo depende de los ángulos, y por lo tanto opera con cualquier magnitud que se implemente. Este grado de libertad hace por lo tanto imposible, incluso matemáticamente, postular con total certeza cualquier posible proporción.

Según Soublette, la magnitud de la estrella sería tal que su longitud de punta externa a interna es un cuarto de la diagonal del campo azul. Sin embargo, resulta imposible corroborar este aspecto a partir de las mediciones. Una hipótesis que es más plausible para el autor es que la circunferencia sobre la cual descansan los vértices de la estrella sea tal que la razón entre el alto del campo azul respecto a su diámetro sea igual a φ . Geométricamente, esto sería más sencillo de implementar, y estéticamente, sería más coherente con el concepto global del diseño y, a la vez, más armonioso: vea la figura inmediatamente anterior para una reproducción siguiendo este patrón. Cabe consignar que la diferencia entre ambas propuestas es casi imperceptible al ojo humano a la escala de 2.4 m de largo de la bandera conservada en el museo.

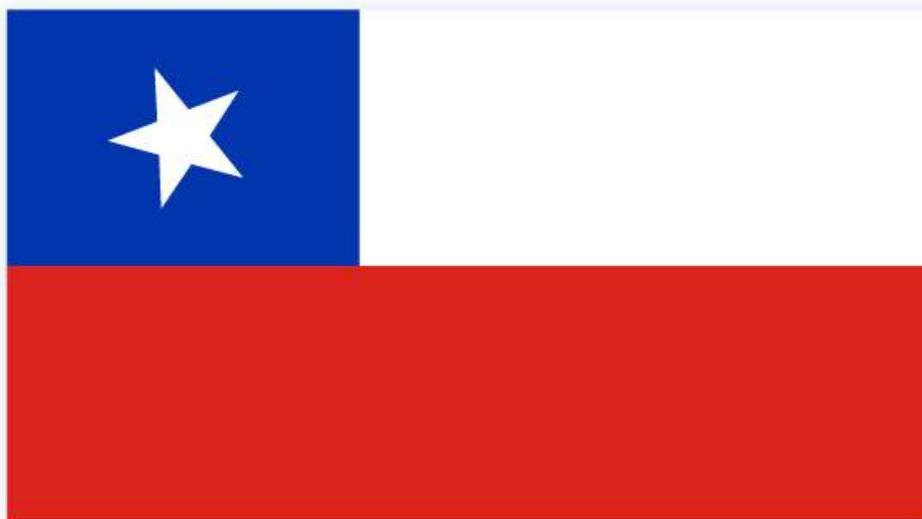
Una vez confeccionado el campo azul, el resto de la bandera es bastante rígido, aunque no exento de controversia. En primer lugar, y contrariamente a lo que señala el esquema de construcción propuesto por Manzo, todas las mediciones indican que el alto del campo rojo es igual al del campo azul. Así, el alto total de la bandera es igual al doble del alto del campo azul.

El último punto de diferendo se refiere entonces al largo de la bandera. Soublette incurre nuevamente en un error al postular que éste está en proporción áurea respecto a su alto y, simultáneamente, la proporción entre los largos de los campos blanco y azul es áurea. En efecto, dichas proporciones son incompatibles una con otra desde el punto de vista matemático, pues cada una de ellas determina completamente el largo de la bandera una vez que se ha pre-establecido el largo del campo azul. La única opción para que ambas proporciones tuviesen lugar sería el que los altos de los campos sean distintos, tal como es propuesto en el esquema de Manzo pero que, como ya vimos, está totalmente descartado de acuerdo a las mediciones.

Para resolver este diferendo, consignemos que las medidas no parecen concordar con

ningún intento de proporción áurea entre el largo y el alto de la bandera. De manera más conceptual, es bien conocido que las proporciones áureas no ejercen un efecto estético mayor al ser implementadas en direcciones diferentes. Sobre esta base, es muchísimo más pertinente postular que el largo de la bandera está escogido de modo tal que la razón del largo del campo blanco respecto al del campo azul sea igual a φ . Además de dar un mejor efecto estético, esto se ajusta muchísimo mejor a las medidas.

Con estas consideraciones, una reconstrucción gráfica de la que debió haber sido la bandera de la Independencia (desprovista de sus escudos y la guñelve) nos arroja la bandera reproducida abajo.



Es lamentable que tan elegante y original construcción no haya sido puesta de manifiesto y valorada en todo su merecimiento en nuestros dos siglos de vida independiente. La bandera de la Independencia es un patrimonio de Chile no sólo como objeto preservado en un museo o en su aspecto simbólico, sino que también pertenece a nuestro patrimonio científico dada la sofisticación de su diseño. De hecho, al enseñar su configuración a matemáticos de todo el mundo, éstos han quedado maravillados con tan hermosa creación geométrica. De más está señalar que, comparada a la actual, sus dimensiones resultan muchísimo más armoniosas a la vista...



Fotografía de la bandera de la Independencia (de 2.4 m de largo) conservada hoy en el museo.

Agradecimientos: El autor agradece a Hernán Aburto por haberle introducido al tema, a Carolina Muñoz por las ilustraciones de este artículo, y a todo el personal del Museo Histórico Nacional, en especial Fanny Espinoza, por la recepción en el lugar y toda la información proporcionada.

Este trabajo contó con el financiamiento del Centro de Sistemas Dinámicos y Temas Relacionados, proyecto Anillo ACT 1103 de CONICYT.

Bibliografía

Juan Manuel Martínez, Catalina Rivera, Francisca Campos y Leonardo Mellado, *Doscientos años, una Bandera. Proceso de Restauración Bandera de la Jura de la Independencia*, Comisión Bicentenario, República de Chile (2010), p. 129.

Rodolfo Manzo, *Los Verdaderos Emblemas de la República de Chile: 1810-2010*, (2011), p. 282.

Gastón Soublette, *La Estrella de Chile* (Ediciones Universitarias de Valparaíso, 1984), p. 124.

Luis Valencia Avaria, *Símbolos Patrios* (Ediciones Gabriela Mistral, Santiago, 1974), p. 96.