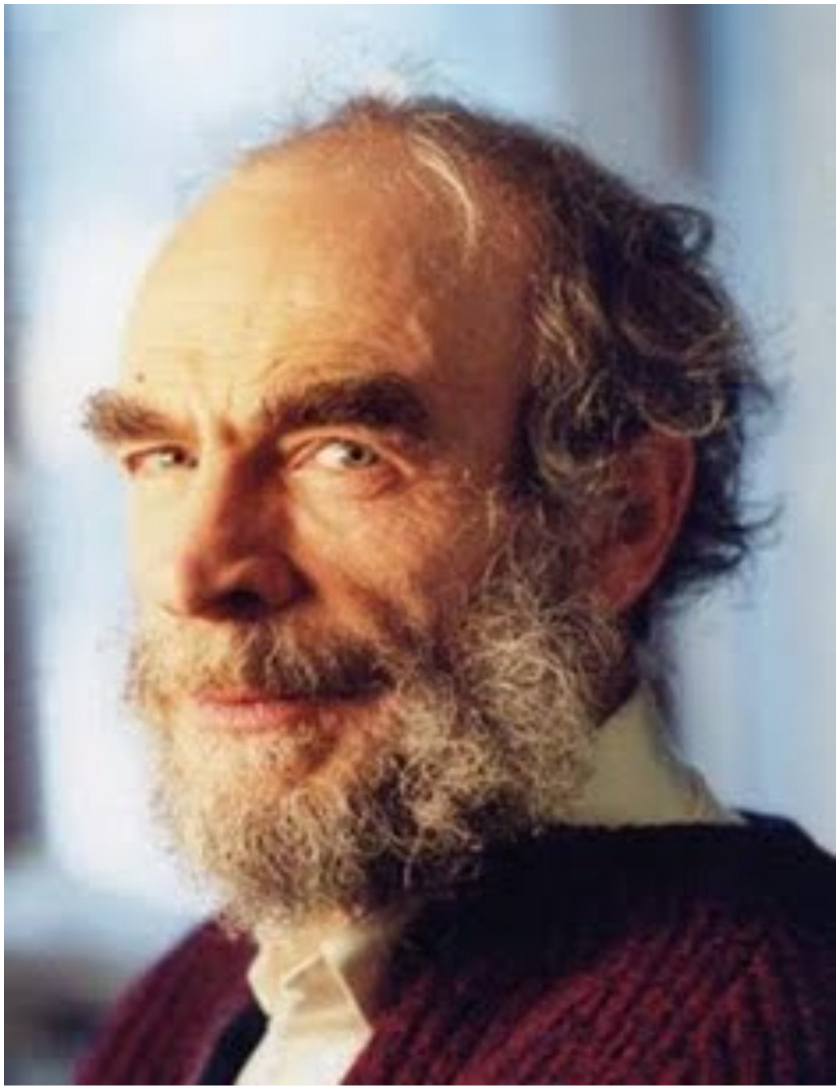
La geometría según Gromov y la noción de espacio métrico

COLOQUIO CONJUNTO
(PUC, Univ. de Chile, USACH)

Andrés Navas (USACH)
28 de Octubre, 2009

Algunos premios importantes



- 1971: premio Soc. Mat. Moscú
- 1981: premio O. Weblen
- 1984: premio E. Cartan
- 1993: premio Wolf
- 1997: premio Leroy
- 1997: medalla Lobatchewski
- 1999: premio Balzan
- 2002: premio Kyoto
- 2004: premio E. Nemmers
- 2005: premio Bolyai
- **2009: PREMIO ABEL**
- 2010-2011-2012… : ???

La matemática de Gromov abarca:

- h-principle and partial differential equations
- distance geometry in Riemmannian manifolds
- metric invariants and qualitative topology
- elliptic operators
- infinite groups: curvature, combinatorics, probability, asymptotic geometry
- positive scalar curvature
- sympletic manifolds and pseudoholomorphic curves
- transformation groups: geometry an recurrence
- locally symmetric spaces & negative curvature
- metric, measure concentration & isoper. inequalities
- Stein & Kaehler manifolds
- Infinite cartesian products and symbolic geometry
- Formalization of genetic and biomolecular structures
- Ergosystems
- Expository, miscellaneous

Geometría Riemanniana

- **Teorema (Gromov 1972):** Toda variedad Riemanniana **no compacta** admite métricas de curvatura positiva en todo punto, y también métricas de curvatura negativa en todo punto.

- Para variedades compactas: la topología impone restricciones a las posibles geometrías (e.g. Gauss-Bonnet).

Teorema de Cheeger y problema de Thom

- **Teorema (Cheeger 1970):** Dadas constantes C,D, V para cada n existe sólo un número finito de tipos de homeomorfismos de n-variedades con |curv.| < C, diámetro < D y volumen > V.

- **Problema (Thom):** Dada una variedad diferenciale compacta, encontrar la métrica Riemanniana "la plus belle possible".

Cómo Gromov enfrenta el problema

- Gromov considera *todas* las métricas posibles en una variedad diferenciable, y estudia fenómenos de convergencia y degeneración geométrica (hundimiento).

- Para esto, Gromov considera más generalmente el **"espacio" de todos los espacios métricos**, y define una métrica apropiada allí…

La métrica de Hausdorff

- X,Y: subespacios de un espacio métrico Z:

$$d_{\mathrm{H}}(X,Y) = \max\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} d(x,y), \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} d(x,y)\},$$

o de manera más sencilla:

$$d_H(X,Y) \leq \varepsilon \iff X \subset Y_\varepsilon \text{ and } Y \subset X_\varepsilon,$$

La métrica de Gromov-Hausdorff

- Si X,Y son espacios métricos **arbitrarios,** la distancia de Gromov-Hausdorff entre ellos es el ínfimo de las distancias de Hausdorff posibles dentro de espacios Z en los que X,Y se incrusten isométricamente.

- **Ejercicio:** la distancia es cero si y sólo si X,Y son isométricos.

Propiedades de (pre-)compacidad

- El "espacio" de los espacios métricos *localmente compactos*, dotado de la métrica G-H, es **completo**.

- **Teorema a la Ascoli-Arzela (Gromov):** Un subconjunto de espacios (compactos) es pre-compacto si y sólo si, para cada r > 0, el número máximo de bolas *disjuntas* de radio r está acotado uniformemente (indep. del espacio).

Teoremas de compacidad de Gromov

- **Teorema (Gromov):** El conjunto de varieda-des n-riemannianas de curvatura de Ricci $\geq -c$ y diámetro $\leq D$ es precompacto (Gromov-Hausdorff).

- **Demostración:** Una minoración de la curva-tura de Ricci permite mayorar el volumen comparativamente al modelo hiperbólico correspondiente (Bishop).

Otras aplicaciones

- Bajo las hipótesis del teorema de Cheeger, se tiene la convergencia hasta cualquier regularidad inferior a 2: ver “Structures métriques pour…” (o el “libro verde” de Gromov).

- **Teorema (Grove-Petersen 1988):** Dadas constantes C, D, V, hay sólo un número finito de tipos de homotopía para n-variedades con curvatura > C, diámetro < D y volumen > V.

Otros resultados

- Demostración alternativa del teorema de la esfera.
- **Var. casi planas de Gromov**: Existe $\varepsilon(n) > 0$ tal que si una n-variedad tiene |curvatura| $< \varepsilon(n)$ y diámetro < 1, entonces, módulo un recubrimiento finito, es difeomorfa a una nilvariedad.
- **Teor. de los números de Betti:** Existe una constante $C=C(n)$ tal que, si M es una n-variedad compacta conexa con *curvatura escalar* positiva, entonces la suma de sus números de Betti es $< C$.

De la geometría a la teoría de grupos

- Milnor-Svarc: La geometría de una variedad compacta y de su grupo fundamental son similares.
- En particular, las variedades de curvatura negativa tienen grupo fundamental a creci-miento exponencial.

Crecimiento de un grupo

- Crecimiento de un grupo: $G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$

  . "conjunto de elementos de G que

  B(e,n) = pueden ser escritos como un producto . $x_i^{\pm 1}$ utilizando no más de n factores"

- La función n → |B(e,n)| se comporta bien
  Por ejemplo, existe el límite: $\lim \frac{\log |B(e,n)|}{n}$

- Un grupo tiene crecimiento polinomial si existe un polinomio P tal que |B(e,n)| ≤ P(n) para todo n

Grupos de crecimiento polinomial

- Z^n tiene crecimiento polinomial de grado n.
- El grupo de Heisenberg

$$G = \langle x, y, z : [x, y] = z, [x, z] = [y, z] = e \rangle$$

  tiene crecimiento polinomial de grado 4.
- Todo grupo nilpotente tiene crecimiento polinomial (Bass, Guivarch):

$$G = G_1 > G_2 > G_3 > \ldots > G_i = 1 \rightarrow grad(G) = \sum k \cdot rango(G_k / G_{k+1})$$

- Si un grupo G contiene un subgrupo de índice finito de crecimiento polinomial, entonces G tiene crecimiento polinomial.

Grupos de crecimiento polinomial

- **Conjetura (Milnor):** Todo grupo a crecimiento polinomial es virtualmente nilpotente.

- Evidencias:
  -- Válida si el grupo es soluble (Milnor-Wolf)
  -- Válida para subgrupos de grupos de Lie (Tits).

- **Gromov (1981) prueba la conjetura de Milnor.**

- Reciente (Tao-Shalom): Versión finita del teorema

Grupos como objetos geométricos

- **Grafo de Cayley de G** (respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_k$): dos elementos x, y de G están unidos por una arista si y sólo si $x^{-1}y$ coincide con algún $x_i^{\pm 1}$
- ¡ El grafo de Cayley es un espacio métrico (localmente compacto) !

- El grupo G actúa por isometrías de su grafo de Cayley (traslaciones a izquierda): versión geométrico-dinámica del teorema de Cayley.
- También actúa por isometrías de todo renormalizado del mismo grafo, **y en cualquier límite G-H.**

Conos asintóticos

- **Observación**: la acción límite puede ser trivial...

  Sin embargo:
- Para grupos no virtualmente abelianos, esto no ocurre.
- Además, (para grupos a crecimiento polinomial) el grupo de las isometrías del espacio límite es un grupo de Lie (Montgomery-Zippin).
- El teorema resulta entonces de la versión para subgrupos de grupos de Lie.

Aplicaciones expansoras

- **Corolario**: Toda aplicación expansora de una variedad compacta es conjugada a un endomorfismo expansor de una infranilvariedad.

- **Lema (Franks):** Si una variedad compacta admite una aplicación expansora entonces su grupo fundamental tiene crecimiento polinomial.
- **Lema (Shub):** Si una variedad compacta que admite una aplicación expansora tiene grupo fundamental casi nilpotente, entonces la aplic. es conjugada a un endomorfismo expansor de una infranilvariedad.

Grupos como objetos geométricos

- Si en un grupo finitamente generado se cambia el sistema de generadores, entonces el grafo de Cayley ya no es el mismo...
- Sin embargo, estos grafos son equivalentes módulo un "factor" y un "error" (equivalencia quasi-isométrica).
- **Programa de Gromov**: clasificar los grupos módulo esta equivalencia (geometría asintótica).

Espacios de curvatura negativa

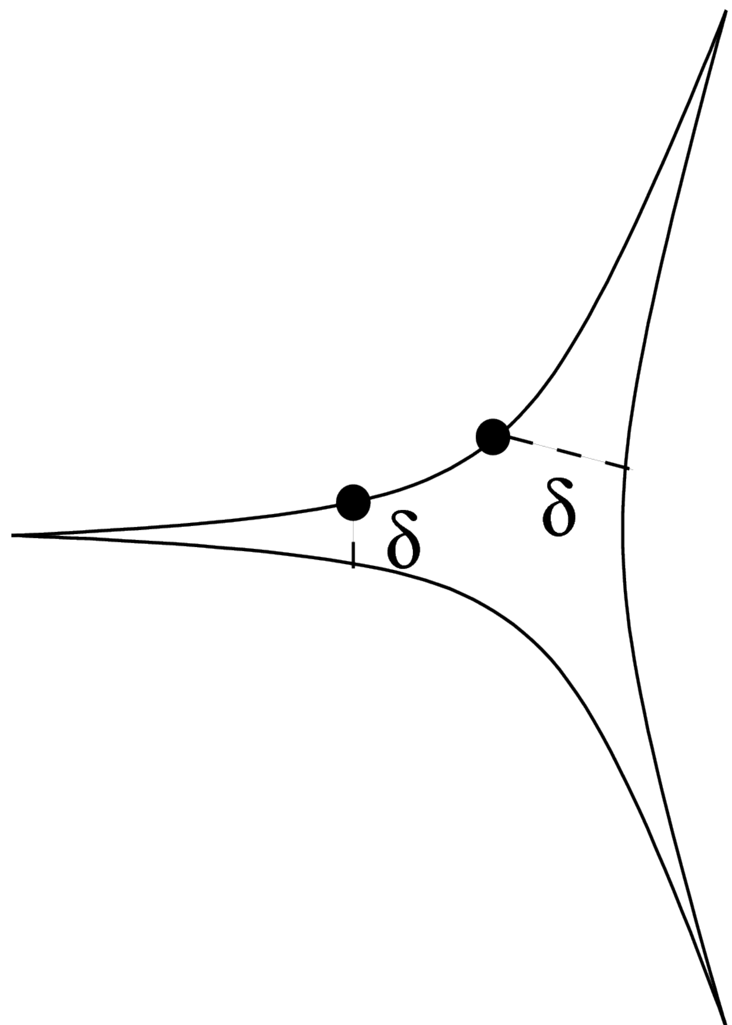
- Trabajos previos de Cartan-Alexandrov-Topogonov, Wolf, Tits... : un espacio tiene curvatura no positiva (o es CAT(0)) si la función distancia tiene propiedades de convexidad tanto o más fuertes que en el plano euclideano.

- Esta noción está desarrollada (a la Gromov) en "Manifolds of non-positive curvature", de Ballman, Gromov y Schröeder.

Espacios (Gromov) hiperbólicos

Noción de curvatura negativa global ("al infinito").

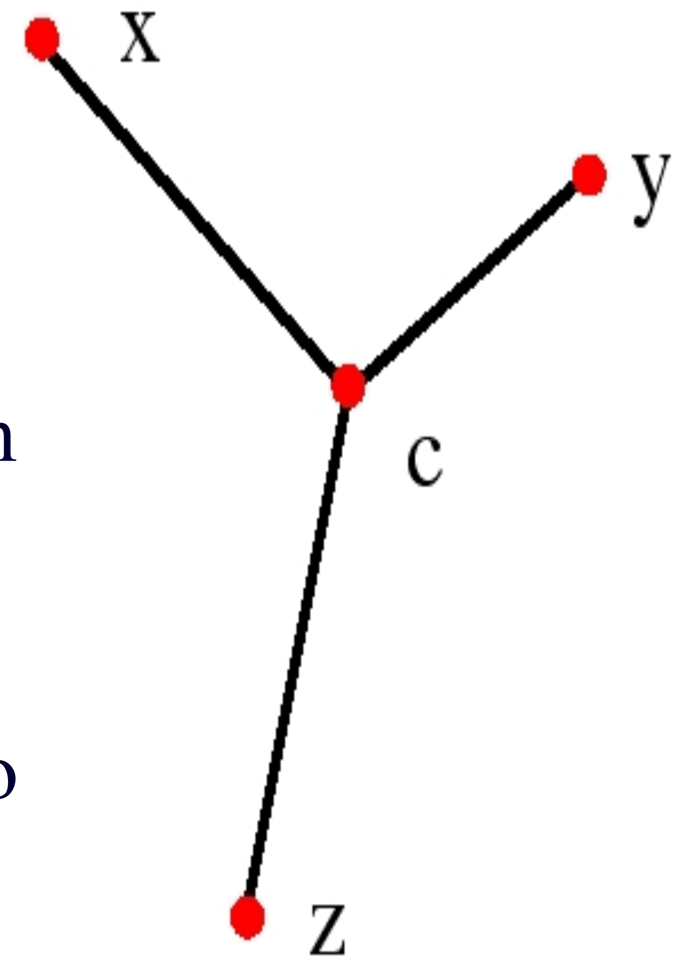
Un espacio es (Gromov)-hiperbólico si los triángulos geodésicos están "curvados hacia adentro" (triángulos "finos"), módulo un error uniformemente controlado.



Espacios (Gromov) hiperbólicos

- Al renormalizar un espacio hiper-bólico y pasar al límite G-H, los triángulos degeneran en trípodes, de modo que el espacio total es un árbol (real).

- ¡ La hiperbolicidad es estable bajo equivalencia quasi-isométrica !



Para espacios no geodésicos:

- Producto de Gromov e hiperbolicidad:

$$(y,z)_x = \frac{1}{2}(d(x,y) + d(x,z) - d(y,z)).$$

$$(x,z)_p \geq \min\{(x,y)_p, (y,z)_p\} - \delta.$$

Grupos (Gromov) hiperbólicos

- Son de presentación finita (Rips-Gromov).
- Son aquéllos que verifican una desigualdad isoperimétrica lineal.
- Tienen una estructura biautomática (Markov).
- Grupos a "pequeña simplificación C(1/6)" son hiperbólicos.
- "Casi todo" grupo de presentación finita.
- Construcción de (contra-)ejemplos.

Algunas referencias

- Rencontres avec un géomètre (Marcel Berger).
- The mathematics of Misha Gromov (Gabor Elek).
- Mickhaïl Gromov, géomètre.

  Images des Mathématiques, sitio internet CNRS (Michèle Audin, Étienne Ghys, Pierre de la Harpe, Pierre Pansu, Alain Valette).

Comentario final (Gromov):

"Los lectores de mis textos tienden a detenerse en los corolarios y las técnicas de demostración,

pero raramente los estudian en profundidad para descubrir la esencia subyacente".