Un problema en dos dimensiones en busca de un final feliz

Andrés Navas

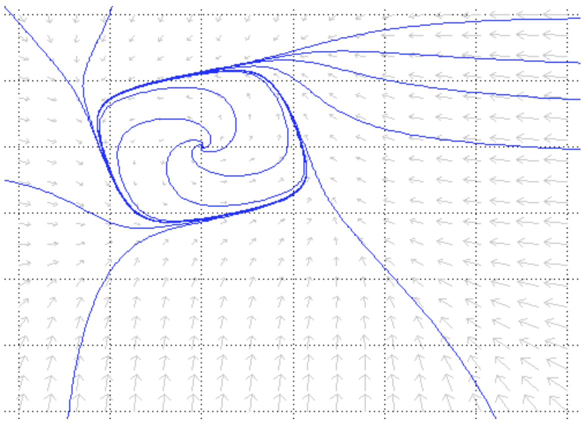
Dpto de Matemática y Ciencia de la Computación, USACH

Presidente de la Sociedad de Matemática de Chile

La matemática es una ciencia en que se trabaja rigurosamente en busca de la perfección absoluta, tratando de no dejar espacio alguno para el error. Sin embargo, al igual que cualquier otra actividad humana –ya sea personal o colectiva-, ella está sujeta a nuestros propios vaivenes. Es así como a lo largo de la historia se han cometido equivocaciones que, reproducidas por generaciones, han tenido en ascuas a quienes las han revelado. Uno de estos magnos errores, de desenlace aún en parte inconcluso, tuvo lugar durante varias décadas del siglo pasado.

La gran mayoría de los fenómenos físicos, biológicos, sociales y económicos se modelan matemáticamente mediante las temidas ecuaciones diferenciales. Si usted no sabe de qué se tratan no importa: de todas maneras, hoy sabemos que en su gran mayoría no pueden ser resueltas como esperaríamos, es decir, encontrando la fórmula de la solución a partir de la fórmula de la ecuación. Pero esto no nos intimida: pese a no ser posible resolverlas, sabemos que una solución existe, y de todas formas queremos “aproximarla” o al menos “predecir” algunas de sus propiedades más importantes. Para ilustrar la relevancia de este proceso, basta mencionar que el informe metereológico que a usted le ayuda a escoger tranquilamente su vestimenta cada día es elaborado aproximando la solución de la famosa ecuación de Navier-Stokes (y otras afines), la cual está lejos de ser completamente dominada por la ciencia y es materia de intenso estudio y controversia…

¿Pero qué es, exactamente, una ecuación diferencial? Aunque las hay de diversos tipos, las que nos conciernen para esta historia tienen lugar en el plano bidimensional y pueden ser fácilmente ilustradas con un dibujo de niños. En efecto, imagine que en cada punto de un plano usted dibuja una flecha que varía suavemente de punto a punto tanto en tamaño como en dirección. Pues bien, esta distribución geométrica “es” una ecuación diferencial, y resolverla no es más que encontrar curvas que sigan tangencialmente las direcciones de estas flechas, de modo que una partícula se mueva a lo largo de ellas a una velocidad variable dependiendo de la longitud de las flechas. Así, un punto en que la flecha desaparece se entiende como un punto estacionario, en el cual la partícula permanece inmóvil. Una vez “resuelta” la ecuación de esta manera pictórica, nos podemos preguntar qué sucede con las curvas halladas: ¿se alejan más y más, o quedan rondando en espiral dentro de alguna región? La ocurrencia de este último fenómeno tiene interpretaciones relevantes de acuerdo al ámbito de estudio. De ahí que el borde de cada región de vorticidad merezca un nombre especial: ciclo límite. En la ilustración a continuación se puede apreciar uno de estos ciclos, pero perfectamente pueden aparecer varios en distintas partes del plano.



Durante el Congreso Internacional de Matemáticas de París en los albores del siglo XX, D.Hilbert, uno de los más destacados matemáticos de la historia, propuso una lista de 23 problemas que guiarían la investigación por los siguientes 100 años. De entre ellos, el problema 16 trataba sobre estos ciclos: si suponemos que la distribución viene dada por una fórmula polinomial, ¿pueden aparecer infinitos ciclos límite? Este importante problema fue "resuelto" negativamente en 1923 por H.Dulac en un largo trabajo, el cual fue "extendido" en 1957 en otro vasto trabajo por G.Petrovski y E.Landis, quienes lograron establecer el número máximo de ciclos que podía aparecer de acuerdo a ciertas características de la ecuación.

No obstante, en los años 70, muchos matemáticos de todas partes del mundo comenzaron a cuestionar los trabajos de Dulac y Petrovski-Landis. No sólo se dieron cuenta de que, en realidad, nadie los había leído en detalle, sino que rápidamente pusieron en evidencia graves errores de argumentación. Una estocada certera vino entonces desde China: en 1979-1980, L.Chen y M.Wang e, independientemente, S.Shi, exhibieron ecuaciones que contradecían la predicción de Petrovski-Landis. Tras ochenta años de trabajo y certezas, todo parecía volver a fojas cero.

Eran momentos de angustia, pero una luz de esperanza surgió en Chile. En 1984, mientras las canciones de Los Prisioneros comenzaban a sonar una y otra vez en las radios locales, Rodrigo Bamón (por entonces en el Instituto de Matemática Pura y Aplicada de Brasil) volvió a las raíces del problema lidiando humildemente con distribuciones cuadráticas, es decir, aquéllas en que los polinomios involucrados tienen grado a lo más 2. Mezclando conocimientos y conceptos profundos con una portentosa astucia felina -es decir, trabajando como toda persona de ciencia idealmente debiese hacerlo-, logró probar (¡esta vez de manera concisa y correcta!) que el número de ciclos límite debe ser finito en tal caso. Esto allanaría el camino para que, años más tarde (1991), J.Écalle e, independientemente, Y.Ilyashenko, resolvieran el problema general de la finitud de ciclos límite para distribuciones polinomiales, reivindicando así, aunque sólo parcialmente, a Dulac. El número máximo de ciclos que pueden aparecer sigue, sin embargo, siendo un misterio.

A pesar de que los trabajos de Ilyashenko y Écalle son extensos y complejos, la comunidad concuerda en que ambos son correctos. Pero, a la luz de la historia, las dudas son perfectamente lícitas. A final de cuentas, en su debido momento, los trabajos de Dulac y de Petrovski-Landis también habían sido validados y transparentemente publicados en prestigiosas revistas especializadas. ¿Qué significa, entonces, que un trabajo sea correcto? ¿Significa que no hay errores lógicos en su formulación y articulación, sin importar que esto lo haga comprensible apenas para un pequeño grupo de científicos (a veces, tan sólo para el autor)? ¿Hasta qué punto un trabajo así es un aporte genuino al conocimiento? Y finalmente, ¿puede un trabajo de este tipo realmente asegurarnos que algo es válido? Personalmente creo que sí, mientras nadie demuestre lo contrario...