Pequeña Fórmula, Dos Grandes Problemas

Andrés Navas
Universidad de Santiago de Chile

En un número anterior de esta revista aparecen dos pequeñas notas en relación a los primos de Mersenne (aquellos de la forma $2^n - 1$) y los de Fermat (los de la forma $2^n + 1$). La importancia de estos números radica en que ellos están relacionados con dos grandes problemas de la matemática, a saber, el de los números perfectos y el de la constructividad de polígonos regulares.

Un hecho interesante es que todo profesor puede motivar a sus alumnos a pensar un poco en estos problemas mientras enseña progresiones geométricas en una clase común. Para ello, recordemos la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Si observamos esta fórmula vemos que de ella se desprende que $x^n - 1$ es siempre divisible por $x - 1$, y cambiando x por $-x$ vemos que $x^{2n+1} + 1$ es divisible por $x + 1$. Luego, $x^n - 1$ y $x^{2n+1} + 1$ nunca son números primos ($x \in \mathbb{N}$).

Volvamos ahora a los primos de Mersenne. La pregunta natural es ¿para qué valores de n el número $2^n - 1$ es primo? Esta pregunta aún no ha sido respondida (vea el artículo *"Los Número Primos: un vasto campo de exploración"*, de Juan Pablo Prieto, año 4/número especial de la revista). Sin embargo, nosotros podemos probar que

Teorema Si $2^n - 1$ es primo entonces n es primo.

Demostración. Si suponemos que n no es primo entonces $n = a \cdot b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. De esta forma $2^n - 1 = (2^a)^b - 1$ es divisible por $2^a - 1 > 1$ lo cual es absurdo, pues $2^n - 1$ es primo. Luego, n debe ser primo.

Los primos de Mersenne dan respuesta al problema de los números perfectos. Recordamos que un número es perfecto si la suma de sus divisores es igual a su doble. Por ejemplo, 6 es perfecto, pues

$$6 + 3 + 2 + 1 = 12 = 2 \cdot 6$$

Gracias a Euclides y Euler sabemos que un número par es perfecto si y sólo si es de la forma

$$2^{n-1}(2^n - 1),$$

donde $2^n - 1$ es primo (por ejemplo, tome $n = 3$ para obtener que 28 es perfecto).

Vamos ahora a los primos de Fermat y probemos que:

Teorema Si $2^n + 1$ es primo entonces n es una potencia de 2.

Demostración. Si n no es una potencia de 2 entonces $n = r(2s+1)$, de donde $2^n+1 = (2^r)^{2s+1}+1$ es divisible por 2^r+1, lo cual es absurdo, pues $2^n + 1$ es primo. Luego, n es una potencia de 2.

Los primos de Fermat dan respuesta al problema de la constructibilidad de polígonos regulares. En efecto, un famoso teorema, debido a Gauss, dice que es posible construir un polígono regular de n lados usando regla y compás si y sólo si n es de la forma $2^m(2^{m_1} + 1) \cdots (2^{m_k} + 1)$, donde cada $2^{m_i} + 1$ es primo.

De hecho, Gauss fue el primer matemático que notó que el polígono regular de $2^4 + 1 = 17$ lados es constructible. Este descubrimiento, hecho cuando él aún no cumplía 20 años, fue el primero de una serie de grandes aportes que hizo quien quizás haya sido el más eximio matemático de la historia.