Caminatas aleatorias sobre grupos finitamente generados

Andrés Navas
Universidad de Santiago de Chile

Índice

INTRODUCCIÓN

Consideremos un grupo (numerable) Γ provisto de una medida de probabilidad μ. La idea intuitiva de una caminata aleatoria sobre Γ siguiendo la ley dada por μ consiste en el movimiento de una partícula entre los elementos del grupo, de modo que en cada paso la probabilidad $p(g \to h)$ de ir desde g a h es igual a $\mu(g^{-1}h)$. Las preguntas clásicas sobre caminatas aleatorias tienen razón de ser en este contexto más general. Nos interesaremos en particular en el comportamiento asintótico de los posibles caminos. Sin embargo, nuestro principal interés no será cuantitativo: nuestro objetivo será relacionar las propiedades de la caminata con la estructura algebraica del grupo.

Notaciones

La cardinalidad de un conjunto A será denotada $|A|$, según sea conveniente.

Capítulo 1

DEFINICIONES GENERALES

1.1 Convolución de Medidas

En el espacio de las sucesiones finitas de largo n de elementos de Γ podemos considerar la medida producto $\mu \times \cdots \times \mu$ (n veces). Bajo la acción de la aplicación $\Gamma^n \to \Gamma$ dada por

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n) \mapsto g_1 g_2 \cdots g_n,$$

la imagen de dicha medida es denominada la n-ésima *convolución* de μ consigo misma, y denotada por $\mu^{*(n)}$. De manera un poco más general, si μ y ν son medidas de probabilidad sobre Γ, entonces la convolución $\mu * \nu$ es una nueva medida de probabilidad sobre Γ definida por

$$\mu * \nu(h) = \sum_{fg=h} \mu(f)\nu(g).$$

Cuando hablemos de la probabilidad de que cierto suceso que depende de n pasos ocurra en la caminata inducida por μ, estaremos tácitamente pensando en la probabilidad correspondiente dada por $\mu^{*(n)}$. Por ejemplo, la probabilidad de transición entre g y h en n pasos es $p^{(n)}(g \to h) = \mu^{*(n)}(g^{-1}h)$. Como convención definimos $p^{(0)}(g \to h) = \delta_g(h)$. Observe que si μ es *simétrica*, es decir, si $\mu(g) = \mu(g^{-1})$ para todo $g \in \Gamma$, entonces lo mismo ocurre para la medida $\mu^{*(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En dicho caso se tiene la igualdad $p^{(k)}(g \to h) = p^{(k)}(h \to g)$ para todo g, h en Γ y todo $k \in \mathbb{N}$.

1.2 Funciones de Green

Para cada g, h en Γ podemos (al menos formalmente) definir la función de Green $G(g, h|\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$G(g, h|x) = G_p(g, h|x) = \sum_{n \geq 0} p^{(n)}(g \to h)x^n.$$

Podemos introducir también las funciones U y F haciendo

$$F(g, h|x) = \sum_{n \geq 0} F_n(g \to h)x^n,$$

donde $F_n(g \to h)$ es la probabidad que partiendo de g se llegue a h por primera vez en tiempo n, y

$$U(g|x) = \sum_{n \geq 1} U_n(g)x^n,$$

donde $U_n(g)$ es la probabilidad de que el tiempo de primer retorno a g sea igual a n. Afirmamos que se tiene la igualdad formal

$$G(g,g|x) = \frac{1}{1-U(g|x)}. \tag{1.1}$$

En efecto, esta igualdad es equivalente a $1 + G(g,g|x)U(g|x) = G(g,g|x)$, es decir a

$$1 + \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{i+j=n} U_i(g) p^{(j)}(g \to g) \right) x^n = G(g,g|x).$$

En otras palabras, debemos probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{i+j=n} U_i(g) p^{(j)}(g \to g) = p^{(n)}(g \to g).$$

Ahora bien, esta última igualdad es evidente, pues el conjunto de caminos que vuelven a g en n pasos es la unión disjunta de las familias de tales caminos para los cuales el primer retorno se produce en tiempo $i \in \{1,\ldots,n\}$, y la probabilidad de la i-ésima familia correspondiente es igual a $U_i(g)p^{(j)}(g \to g)$.

Las siguientes identidades pueden ser fácilmente obtenidas mediante argumentos análogos:

$$G(g,h|x) = F(g,h|x)G(h,h|x), \tag{1.2}$$

$$U(g|x) = x \sum_{f\in\Gamma} p(g \to f)F(f,g|x), \tag{1.3}$$

$$F(g,h|x) = x \sum_{f\in\Gamma} p(g \to f)F(f,h|x) \quad \text{si} \quad g \neq h, \tag{1.4}$$

En lo que sigue supondremos siempre que la caminata es *irreducible*, es decir que para todo g,h en Γ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^{(n)}(g \to h) > 0$. Observe que, bajo esta hipótesis, la serie $G(g,h|x)$ converge o diverge simultáneamente para todo g,h en Γ. En efecto, dados g_1,h_1,g_2,h_2 en Γ, escogiendo $m,n \in \mathbb{N}$ tales que $p^{(m)}(g_1 \to g_2) > 0$ y $p^{(n)}(h_2 \to h_1) > 0$, vemos que la desigualdad (válida para todo entero $k \geq 0$)

$$p^{(m+k+n)}(g_1 \to h_1) \geq p^{(m)}(g_1 \to g_2)p^{(k)}(g_2 \to h_2)p^{(n)}(h_2 \to h_1),$$

implica que, para $x \geq 0$,

$$G(g_1,h_1|x) \geq x^{m+n} p^{(m)}(g_1 \to g_2)p^{(n)}(h_2 \to h_1)G(g_2,h_2|x).$$

Ejemplo 1.2.1. Fijemos la medida de probabilidad simétrica μ sobre $\mathbb{Z}$ que otorga masa $1/2$ a cada generador: $\mu(1) = \mu(-1) = 1/2$. Para esta medida "estándar" tenemos las igualdades

$$p^{(2n+1)}(e \to e) = 0, \qquad p^{(2n)}(e \to e) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

La primera de ellas se debe a que, para volver al origen, se requiere de un número par de pasos. Para justificar la segunda igualdad, basta notar que un camino que comienza en $e = 0$ y acaba en $e = 0$ tras $2n$ pasos debe dar exactamente n pasos a la derecha y n a la izquierda. Concluimos así que, para todo $m \in \mathbb{Z}$,

$$G(m,m|x) = G(0,0|x) = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

De la identidad $\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$ se concluye que, si la serie anterior converge, entonces se tiene

$$G(m,m|x) = \sum_{n\geq 0} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.2.2. El caso en que la probabilidad sobre $\mathbb{Z}$ en consideración no es simétrica resulta más complicado. Supongamos por ejemplo que $\mu(1) = \rho$, $\mu(-1) = \varrho$, $\rho + \varrho = 1$ y $\rho \neq \varrho$. La igualdad ya empleada $\binom{2n}{n} = 2^{2n}(-1)^n\binom{-1/2}{n}$ implica que

$$G(0,0|1) = \sum_{n\geq 0}(\sqrt{\rho\varrho})^n \binom{n}{\frac{n}{2}} = \sum_{n\geq 0}(\rho\varrho)^n \binom{2n}{n} = \sum_{n\geq 0}\binom{-1/2}{n}(-4\rho\varrho)^n = (1-4\rho\varrho)^{-1/2} = \frac{1}{|\rho-\varrho|}.$$

Concluimos entonces que

$$G(0,m|1) = F(0,m|1)\,G(m,m|1) = \frac{F(0,m|1)}{|\rho-\varrho|}. \tag{1.6}$$

Para el cálculo de $F(0,m|1)$ usaremos una técnica clásica en la teoría de "procesos de renovación" (compare con el ejercicio 2.0.9). De la igualdad

$$F(0,m|x) = \sum_{n\geq 0} F_n(0,m)x^n = F_0(0,m) + \sum_{n\geq 1} F_n(0,m)x^n$$

se concluye, para $m \geq 1$,

$$F(0,m|x) = \rho\sum_{n\geq 1} F_{n-1}(1,m)x^n + \varrho\sum_{n\geq 1} F_{n-1}(-1,m)x^n,$$

es decir

$$F(0,m|x) = \rho x F(0,m-1|x) + \varrho x F(0,m+1|x). \tag{1.7}$$

La solución recursiva general de la ecuación (1.7) viene dada por

$$F(0,m|x) = \alpha(x)\lambda_1(x)^m + \beta(x)\lambda_2(x)^m,$$

donde $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$ son las soluciones de la ecuación cuadrática $\lambda(x) = \rho + \varrho\lambda^2(x)$. En particular, para $x = 1$ obtenemos, para ciertas constantes α y β,

$$F(0,m|1) = \alpha + \beta(\rho/\varrho)^m.$$

Puesto que $F(0,m|1) \leq 1$, si $\rho > \varrho$ debemos tener necesariamente $\beta = 0$. Además, como $F(0,0|1) = 1$, se tiene además en este caso $\alpha = 1$, y por lo tanto $F(0,m) = 1$ para todo $m \geq 0$. De (1.6) se concluye que para $\rho > \varrho$ se verifica la identidad

$$\left(\frac{\varrho}{\rho}\right)^m \sum_{n\geq m}(\sqrt{\rho\varrho})^n\binom{n}{\frac{n+m}{2}} = G(0,m|1) = \frac{1}{\rho-\varrho}. \tag{1.8}$$

Dejamos al lector la tarea de verificar que para $\rho \leq \varrho$ se cumple

$$G(0,m|1) = \frac{1}{\varrho-\rho}\left(\frac{\rho}{\varrho}\right)^m.$$

Ejemplo 1.2.3. Cuando $p(e \to e) = 0$ podemos perturbar ligeramente la medida μ para situarnos en el caso en que $p(e \to e) > 0$. De manera más precisa, para $\tau \in]0,1[$ podemos considerar la medida $\mu_\tau = \tau\delta_e + (1-\tau)\mu$ de probabilidades de transición $p_\tau(g \to h) = \tau\delta_g(h) + (1-\tau)p(g \to h)$. La caminata asociada a la medida μ_τ es llamada la "caminata perezosa" correspondiente a μ; su "coeficiente de pereza" es igual a τ. Intuitivamente, a cada unidad de tiempo la probabilidad de permanecer en el mismo sitio es igual a $\tau + \mu(e)$ y la de moverse igual a $1-\tau-\mu(e)$; en caso de movimiento, éste se realiza siguiendo la ley de μ. Para establecer una relación simple entre las funciones de Green correspondientes, notemos primeramente que la operación de convolución se comporta bien respecto a combinaciones convexas de probabilidades:

$$\big(\tau\nu_1 + (1-\tau)\nu_2\big)^{*(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\tau^i(1-\tau)^{n-i}\nu_1^{*(i)} * \nu_2^{*(n-i)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\tau^{n-i}(1-\tau)^i\nu_1^{*(n-i)} * \nu_2^{*(i)}.$$

De esta igualdad se deduce que

$$\begin{aligned}
G_{p_\tau}(g,g|x) &= \sum_{n\geq 0} p_\tau^{(n)}(g\to g)x^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\tau^{n-i}(1-\tau)^i p^{(i)}(g\to g)x^n \\
&= \sum_{i\geq 0}\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^i p^{(i)}(g\to g)\sum_{n\geq i}\binom{n}{i}(\tau x)^n \\
&= \sum_{i\geq 0}\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^i p^{(i)}(g\to g)\sum_{n\geq 0}\binom{n+i}{i}(\tau x)^{n+i} \\
&= \sum_{i\geq 0}\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^i (\tau x)^i p^{(i)}(g\to g)\sum_{n\geq 0}\binom{-i-1}{n}(-\tau x)^n \\
&= \frac{1}{1-\tau x}\sum_{i\geq 0}\left(\frac{x(1-\tau)}{1-\tau x}\right)^i p^{(i)}(g\to g) = \frac{1}{1-\tau x}G_p\left(g,g\Big|\frac{x(1-\tau)}{1-\tau x}\right).
\end{aligned}$$

En particular, para $\tau = 1/2$ se tiene

$$G_{\frac{1+p}{2}}(g,g|x) = \frac{1}{1-x/2}G_p\left(g,g\Big|\frac{x}{2-x}\right).$$

Ejemplo 1.2.4. Probaremos a continuación que si $L_k = \langle g_1,\ldots,g_k\rangle$ designa al grupo libre en $k\geq 2$ generadores, y si μ es la medida simétrica equidistribuida sobre los generadores ($\mu(g_i) = \mu(g_i^{-1}) = 1/2k$), entonces en los puntos de convergencia de la serie $G(g,g|x)$ se tiene la igualdad

$$G(g,g|x) = \frac{2k-1}{k-1+\sqrt{k^2-(2k-1)x^2}}. \tag{1.9}$$

Notemos que esta igualdad aún es válida cuando $k=1$, es decir, cuando el grupo en consideración es $\mathbb{Z}$. Sin embargo, como veremos en el Capítulo 2, existe una diferencia esencial con el caso $k\geq 2$ en relación a los radios de convergencia de las series correspondientes.

Para probar (1.9) usaremos una técnica utilizada por Kesten en [20] (vea también el ejercicio 2.0.9 para una demostración más simple pero menos directa). Trabajaremos con la serie $U(e|x)$, la cual es más simple de manipular. En efecto, usando métodos combinatorios elementales, se puede probar directamente que

$$U_{2n}(e) = \frac{1}{n(2k)^{2n}}\binom{2n-2}{n-1}2k(2k-1)^{n-1}.$$

Sin embargo, en lugar de razonar de esta manera, nosotros calcularemos directamente la suma $U(e|x)$ estableciendo una relación de recurrencia para los coeficientes $U_n(e)$. Para ello, notemos en primer lugar que $U_n(e) = |P(n)|/(2k)^n$, donde $|P(n)|$ es la cardinalidad del conjunto $P(n)$ de las palabras de n letras entre $g_1^{\pm 1},\ldots,g_k^{\pm 1}$ que representan a e en L_k y tales que ningún segmento izquierdo de dicha palabra representa también a e. En particular, $U_{2n+1}(e) = 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

A cada palabra de $P(2n)$ podemos asociar un camino uniendo puntos del reticulado $\mathbb{Z}^2\cap[0,n]^2$ de la siguiente forma: para $h_1\cdots h_{2n}\in P(2n)$ y $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ trazamos una k-ésima linea horizontal (resp. vertical) si $dist(e,h_1\cdots h_k) = dist(e,h_1\cdots h_{k-1})+1$ (resp. si $dist(e,h_1\cdots h_k) = dist(e,h_1\cdots h_{k-1})-1$), donde $dist(e,h)$ denota la "distancia" de h al elemento neutro, es decir el mínimo k tal que se cumple una igualdad del tipo $h = g_{i_1}^{\pm 1}\cdots g_{i_k}^{\pm 1}$. Es claro que el camino determinado por una palabra de $P(2n)$ no intersecta a la diagonal excepto en $(0,0)$ y (n,n); el resto del camino se encuentra "bajo la diagonal". Denotaremos por $C(n)$ al conjunto de los caminos verificando estas propiedades, y por c_n la cardinalidad de $C(n)$.

Cada camino de $C(n)$ es la imagen de $2k(2k-1)^{n-1}$ elementos de $P(2n)$: para el primer paso tenemos $2k$ posibilidades, para cada paso horizontal $2k-1$ y cada paso vertical está únicamente determinado. Concluimos así la identidad

$$U(e|x) = \sum_{n\geq 1}\frac{x^{2n}}{(2k)^{2n}}2k(2k-1)^{n-1}c_n = \frac{2k}{2k-1}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{(2k-1)x^2}{4k^2}\right)^n c_n.$$

Un cálculo combinatorio que nosotros evitaremos (vea sin embargo el ejercicio 1.2.5) muestra que c_n coincide con el n-ésimo número de Catalán $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$. Nosotros nos apoyaremos sobre la siguiente relación recursiva.

Afirmación. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$c_n = \sum_{i+j=n} c_i c_j. \tag{1.10}$$

Prueba. Consideremos la diagonal Δ' ubicada inmediatamente bajo la diagonal principal del reticulado. Para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ designemos por $|C(n,i)|$ la cardinalidad del conjunto $C(n,i)$ de los caminos de $C(n)$ cuyo primer vértice común con Δ' después de $(1,0)$ es $(i+1,i)$. Obviamente,

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} |C(n,i))|.$$

Basta probar entonces que $|C(n,i)| = c_i c_{n-i}$. Para ello, note que cada camino de $C(n,i)$ determina un camino de $C(i)$ y otro de $C(n-i)$ de manera única. El primero de ellos es aquél que comienza en $(1,0)$ y acaba en $(i+1,i)$ (trasladado posteriormente de modo que comience en el origen); el segundo es aquél que comienza en (i,i) y termina en (n,n), coincidiendo con el camino original entre $(i+1,i)$ y (n,n) (nuevamente, trasladado al origen: vea la Figura 1). Se obtiene así una correspondencia biunívoca

$$C(n,i) \to C(i) \times C(n-i),$$

lo que permite concluir la demostración de la afirmación.

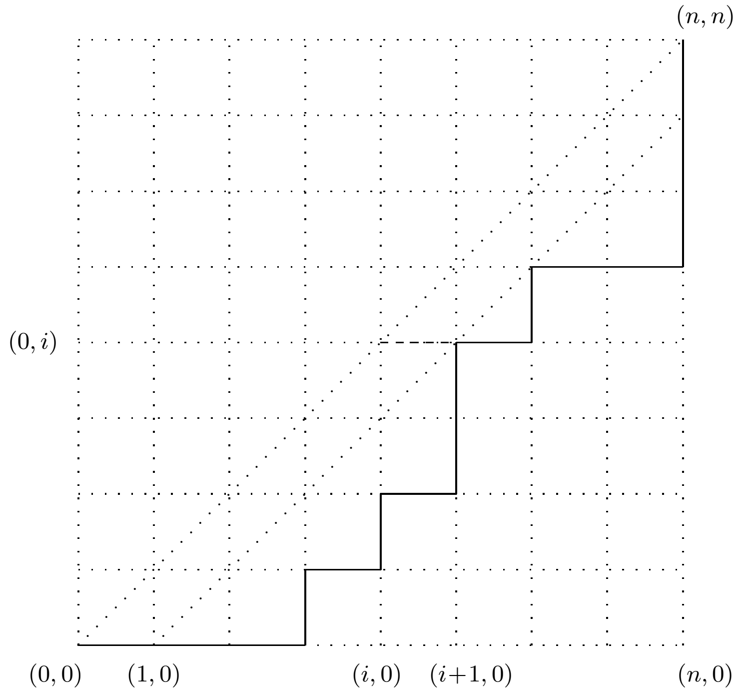

Figura 1

Para simplificar notaciones, hagamos $u = \frac{(2k-1)x^2}{4k^2}$. Un cálculo formal basado en la igualdad (1.10) nos da

$$U(e|x)^2 = \left(\frac{2k}{2k-1}\sum_{n\geq 1} c_n u^n\right)^2 = \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \sum_{n\geq 2}\Big[\sum_{i+j=n} c_i c_j\Big]u^n = \left(\frac{2k}{2k-1}\right)\Big[\frac{2k}{2k-1}\sum_{n\geq 2} c_n u^n\Big],$$

es decir
$$U(e|x)^2 = \left(\frac{2k}{2k-1}\right)\Big[U(e|x) - \frac{2k}{2k-1}c_1u\Big].$$
Puesto que $c_1 = 1$, si (la serie que define a) $U(e|x)$ converge, entonces ella satisface la ecuación
$$\Big(\frac{2k-1}{2k}\Big)U(e|x)^2 - U(e|x) + \frac{x^2}{2k} = 0,$$
y por lo tanto
$$U(e|x) = \frac{k - \sqrt{k^2 - x^2(2k-1)}}{2k-1}.$$
En dicho caso,
$$G(e,e|x) = \frac{1}{1 - U(e|x)} = \frac{2k-1}{k - 1 + \sqrt{k^2 - (2k-1)x^2}}. \tag{1.11}$$

Ejercicio 1.2.5. Pruebe que $c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$. Luego, usando la aproximación de Stirling $k! \sim \sqrt{2\pi k}\,(k/e)^k$, pruebe que el radio de convergencia de la serie $G(e,e|x)$ es igual a $k/\sqrt{2k-1}$.

1.3 Funciones Armónicas y Supra-armónicas

Dada una función $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$, la acción de la caminata inducida por μ sobre φ origina una nueva función $P(\varphi) = P_p(\varphi) = P_\mu(\varphi) : \Gamma \to \mathbb{R}$, a saber
$$P(\varphi)(g) = \sum_{h\in\Gamma} p(g \to h)\varphi(h) = \sum_{f\in\Gamma}\varphi(gf)\mu(f).$$
La transformada P es llamada *operador de transición*. Observe que el operador $P_{\mu^{*(k)}}$ asociado a la k-ésima convolución de μ coincide con la k-ésima potencia $(P_\mu)^k$.

Una función $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ es *armónica* (resp. *supra-armónica*) si para todo $g \in \Gamma$ se tiene $\varphi(g) = P(\varphi)(g)$ (resp. $\varphi(g) \geq P(\varphi)(g)$).

Ejemplo 1.3.1. Si $G(e,e|1)$ converge entonces para cada $g \in \Gamma$ la función $\varphi(h) = G(h,g|1)$ es supra-armónica. En efecto,
$$P(\varphi)(h) = \sum_{f\in\Gamma} p(h \to f)\varphi(f) = \sum_{f\in\Gamma} p(h \to f)\sum_{n\geq 0} p^{(n)}(f \to g) = \sum_{n\geq 1} p^{(n)}(h \to g) = \varphi(h) - p^{(0)}(h \to g) \leq \varphi(h).$$

En el contexto presente vale el importantísimo *principio del mínimo*: toda función supra-armónica que asume su valor mínimo es constante. La prueba de esto es sencilla. Si φ asume su valor mínimo en un punto $g \in \Gamma$, entonces de la desigualdad $\varphi(g) \geq \sum_{h\in\Gamma} p(g \to h)\varphi(h)$ y del hecho que $\sum_{h\in\Gamma} p(g \to h) = 1$, se deduce que si $p(g \to h) > 0$ entonces $\varphi(g) = \varphi(h)$. El mismo argumento permite verificar inductivamente que si $p^{(k)}(g \to h) > 0$ entonces $\varphi(g) = \varphi(h)$. Recordando que la caminata es irreducible, se concluye lo afirmado.

Observemos finalmente que para funciones armónicas vale también el *principio del máximo*: si φ es armónica y asume su valor máximo, entonces φ es constante. Para verificar esto, basta aplicar el principio del mínimo a la función (supra-armónica) $-\varphi$.

Capítulo 2

RECURRENCIA Y TRANSIENCIA

Diremos que la caminata inducida por μ es *recurrente* (resp. *transiente*) si el valor de

$$G(e,e|1) \sum_{n\geq 1} p^{(n)}(e \to e)$$

es infinito (resp. finito). Antes de dar una justificación más clara de esta definición, veamos algunos ejemplos fundamentales.

Ejemplo 2.0.2. En el ejemplo 1.2.1 vimos que para la medida estándar sobre $\mathbb{Z}$ se tiene

$$p^{(2n+1)}(e \to e) = 0, \qquad p^{(2n)}(e \to e) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Usando la aproximación de Stirling $k! \sim \sqrt{2\pi k}\,(k/e)^k$ se comprueba fácilmente que $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. A partir de esto se concluye que

$$\sum_{n\geq 1} p^{(n)}(e \to e) \geq C \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty.$$

Análogamente, para la medida μ simétrica y equidistribuida sobre los generadores $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$ de $\mathbb{Z}^2$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} p^{(n)}(e \to e) &= \sum_{n\geq 1} \sum_{i+j=2n} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{i,j,n-i,n-j} \\
&= \sum_{n\geq 1} \sum_{i+j=2n} \frac{(2n)!}{4^n\, i!j!(n-i)!(n-j)!} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sum_{i+j=n} \binom{n}{i}\binom{n}{j} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}^2 \\
&\geq C \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.0.3. Para la medida estándar sobre $\mathbb{Z}^3$ es fácil ver que

$$\begin{aligned} p^{(2n)}(e \to e) &= \frac{1}{6^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{i+j \leq n} \left(\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{6^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{n!}{[n/3]!} \sum_{i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \\ &= \frac{1}{6^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{n!}{[n/3]!} 3^n \\ &\leq \frac{C}{n^{3/2}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{n \geq 1} p^{(n)}(e \to e) \leq C \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty.$$

La caminata asociada es por lo tanto transiente. Lo mismo ocurre con el grupo $\mathbb{Z}^k$ para todo $k \geq 3$.

Para comprender mejor los conceptos de recurrencia y transiencia, debemos relacionarlos con la existencia de funciones armónicas y supra-armónicas no negativas.

Lema 2.0.4. *La caminata es recurrente si y sólo si toda función supra-armónica no negativa es constante.*

Demostración. En el caso transiente para cada $g \in \Gamma$ la función $h \mapsto G(h, g|1)$ es no negativa, supra-armónica y no constante.

Supongamos ahora que la caminata sea recurrente. Si φ es no negativa y supra-armónica, entonces la función $\psi = \varphi - P(\varphi)$ es no negativa y verifica

$$\sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(g \to h)\psi(h) \leq \sum_{k=0}^{n} P^k(\psi)(g) = \varphi(g) - P^{k+1}(\varphi)(g) \leq \varphi(g).$$

Si $\psi(h) \neq 0$ para algún $h \in \Gamma$, entonces tomando el límite cuando n tiende al infinito en la desigualdad anterior obtenemos $G(g, h|1) \leq \varphi(g)/\psi(h)$, lo cual contradice la recurrencia. Luego, la función ψ es idénticamente nula, es decir, φ es armónica.

Ahora, si escogemos $g \in \Gamma$ y definimos $\varphi_g(h) = \min\{\varphi(h), \varphi(g)\}$, vemos que esta función también es supra-armónica y no negativa. El razonamiento anterior muestra entonces que ella es armónica. Como ella asume su máximo, debe necesariamente ser constante, lo cual muestra que nuestra función original φ también es constante. □

Podemos reformular entonces la noción de recurrencia de diversas maneras. En efecto, (bajo la hipótesis de irreducibilidad) las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) la caminata es recurrente,

(ii) $G(g, h|1) = \infty$ para algún (todo) g, h en Γ,

(iii) $U(g, g|1) = 1$ para algún (todo) $g \in \Gamma$,

La proposición siguiente completa la justificación de la definición de recurrencia y transiencia.

Proposición 2.0.5. *Si la caminata es recurrente, entonces para todo g, h en Γ la probabilidad de ir desde g a h infinitas veces es igual a 1. Por el contrario, si la caminata es transiente, entonces para todo subconjunto finito A de Γ la probabilidad de caer infinitas veces en puntos de A es igual a 0.*

Demostración. Introduzcamos la función

$$I(h, g) = \text{ probabilidad de que la caminata pase infinitas veces por } g \text{ partiendo desde } h.$$

Si $I_n(g,g)$ designa la probabilidad de ir de g a g al menos n veces, entonces se verifica fácilmente que $I_n(g,g) = U(g|1)I_{n-1}(g,g)$, por lo que

$$I(g,g) = \lim_{n\to\infty} I_n(g,g) = \lim_{n\to\infty} U^{n-1}(g|1)$$

es igual a 0 (resp. 1) en el caso transiente (resp. recurrente).

Observe ahora que para cada $g \in \Gamma$ la función $h \mapsto I(h,g)$ es armónica. Luego, si la caminata es recurrente, entonces el principio del máximo implica la primera afirmación de la proposición. En el caso transiente, el principio del mínimo nos da $I(g,h) = I(h,h) = 0$ para todo g,h en Γ. Luego, si A es un subconjunto finito de Γ, entonces la probabilidad de pasar infinitas veces por A debe ser necesariamente igual a 0. $\square$

El objetivo principal de este capítulo es presentar las ideas fundamentales de la demostración del resultado siguiente, debido esencialmente a N. Varopoulos.

Teorema 2.0.6. *Un grupo finitamente generado admite una medida de probabilidad simétrica para la cual la caminata aleatoria es irreducible y recurrente si y sólo si dicho grupo es finito o bien una extensión finita de $\mathbb{Z}$ o de $\mathbb{Z}^2$.*

Por razones que serán claras más adelante, es conveniente generalizar el contexto en el cual trabajamos, saliendo del ámbito de la teoría de grupos. En general, dado un grafo conexo X de aristas (orientadas) $\overrightarrow{Ar}(X)$, una familia de probabilidades de transición $p(g \to h)$ induce una caminata aleatoria si para cada $g \in X$ se tiene $\sum_{h\in X} p(g \to h) = 1$. En tal caso, la k-ésima probabilidad de transición entre g y h viene dada por

$$p^{(k)}(g \to h) = \sum_{f_1,\ldots,f_{k-1}\in X} p(g \to f_1)p(f_1 \to f_2)\cdots p(f_{k-2} \to f_{k-1})p(f_{k-1} \to h).$$

Observe que no estamos suponiendo que los pasos sólo pueden darse a los vecinos. En otras palabras, puede tenerse $p(g \to h) > 0$ para vértices g y h de X que no son extremos de una misma arista. Sin embargo, las probabilidades de transición dotan a X de una nueva estructura de grafo: dos vértices g,h están unidos si y sólo si $p(g \to h) > 0$. Denotaremos al conjunto de las aristas orientadas del nuevo grafo por $\overrightarrow{Ar}_p(X)$,

Convenimos nuevamente en que $p^{(0)}(g \to h) = \delta_g(h)$. Diremos que la caminata (X,p) es:

– *irreducible* si para todo g,h en X existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^{(n)}(g \to h) > 0$,

– *uniformemente irreducible* si existen $\varepsilon > 0$ y $k < \infty$ tales que si g y h son vértices de una misma arista de $\overrightarrow{Ar}(X)$ entonces $p^{(n)}(g \to h) > \varepsilon$ para algún $n \leq k$,

– *simple* si X es localmente finito (es decir, cada vértice es extremo de sólo un número finito de aristas) y $p(g \to h)$ es igual a $1/grad(g)$ ó a 0, dependiendo de si g y h son extremos de una misma arista de $\overrightarrow{Ar}(X)$ o no ($grad(g)$ denota el grado del vértice g).

Ejemplo 2.0.7. Si Γ es un grupo finitamente generado y $\{g_1,\ldots,g_k\}$ es un sistema de generadores de Γ, entonces podemos construir un grafo cuyos vértices son los elementos del grupo y g,h en Γ están conectados por una arista si y sólo si $g^{-1}h$ es igual a algún g_i ó g_i^{-1}. El grafo así obtenido es llamado *grafo de Cayley* de Γ. Dicho grafo depende evidentemente del sistema de generadores, pero como veremos más adelante, algunas de sus propiedades geométricas relevantes permanecen intactas bajo cambios de sistema generador.

Observe que (el conjunto de los vértices de) un grafo puede ser visto como un espacio métrico discreto, donde $dist(g,h)$ es dada por el número mínimo de aristas que deben ser recorridas para ir desde g a h. Cuando un camino formado por n aristas une dos vértices situados a distancia n, decimos que ese camino es una *geodésica* entre dichos vértices. Denotamos por $\gamma(g,h)$ la familia de geodésicas entre g y h.

Se dice que X es de *geometría finita* si existe una cota superior (uniforme) para el grado de todos sus vértices. Por su parte, una caminata (X,p) es dicha *de rango acotado* si existe $D > 0$ tal que si $p(g \to h) > 0$ entonces $dist(g,h) \leq D$. Por ejemplo, si $\mathcal{G} = \{g_1,\ldots,g_k\}$ es un sistema finito de generadores de un grupo

Γ, entonces el grafo de Cayley correspondiente es de geometría finita. Si $\mathcal{G}$ es simétrico (en el sentido que $h \in \mathcal{G}$ implica $h^{-1} \in \mathcal{G}$) y μ es una probabilidad sobre Γ cuyo soporte es igual a $\mathcal{G}$, entonces la caminata asociada (dada por la probabilidades de transición $p(g \to h) = \mu(g^{-1}h)$) es irreducible y de rango acotado (para $D = 1$).

Ejercicio 2.0.8. Una aplicación R entre espacios métricos $(X, dist)$ y $(X', dist')$ es una *quasi-isometría* si existen constantes positivas A y B tales que, para todo x, y en X y todo $x' \in X'$,

(i) $A^{-1} dist(x, y) - B \leq dist'(R(x), R(y)) \leq A\ dist(x, y) + B$,

(ii) $dist'(x', R(X)) \leq B$.

Pruebe que toda quasi-isometría admite una *quasi-inversa*, es decir, una aplicación quasi-isométrica $S\colon X' \to X$ tal que $dist(x, SR(x)) \leq C$ y $dist'(x', RS(x')) \leq C$ para cierta constante $C > 0$ y todo $x \in X$, $x' \in X'$. Verifique también que la relación de quasi-isometría es transitiva. Pruebe que si $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ son dos sistemas finitos de generadores de un grupo Γ, entonces los grafos de Cayley asociados son quasi-isométricos.

Ejercicio 2.0.9. Pruebe que en un grupo libre F_k se tiene $F(g, h|x) = F(g, f|x)F(f, h|x)$ para todo g, h en Γ y todo f sobre la geodésica que une ambos puntos. Concluya que existe un función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(g, h|x) = F(x)^{dist(g,h)}$, y aplicando (1.4) pruebe que F satisface la identidad

$$F(x) = \frac{x}{2k} + \left(\frac{2k-1}{2k}\right) xF(x)^2.$$

Resuelva esta ecuación en $F(x)$ y reobtenga (1.11).

2.1 Conductancia, Resistencia y Flujos

La caminata (X, p) es *reversible* si existe una medida $m : X \to\ ]0, \infty[$ tal que, para todo g, h,

$$m(g)p(g \to h) = m(h)p(h \to g).$$

En tal caso, $c(g, h) = m(g)p(g \to h)$ es la *conductancia* de la arista que une g y h, mientras que $m(g)$ es la *conductancia total* en g. Si $\overrightarrow{a}$ es una arista de vértices inicial y final $\overrightarrow{a}^-$ y $\overrightarrow{a}^+$ respectivamente (lo cual denotamos por $\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a}^-, \overrightarrow{a}^+)$), entonces la *resistencia* de $\overrightarrow{a}$ es $r(\overrightarrow{a}) = 1/c(\overrightarrow{a}^-, \overrightarrow{a}^+)$. Observe que la conductancia y resistencia de cada arista $\overrightarrow{a}$ no dependen de la orientación de ésta, por lo que podemos denotarlas simplemente por $c(a)$ y $r(a)$. Finalmente, note que $m(g)p^{(k)}(g \to h) = m(h)p^{(k)}(h \to g)$ para todo g, h en X y todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.1.1. Para el caso de un grupo Γ, si la medida de probabilidad μ es simétrica, entonces la caminata es reversible respecto a cualquier conductancia constante $m(g) = cte$. Utilizaremos en tal caso las conductancias $m(g) = 1$ ó $m(g) = grad$, donde $grad$ es el grado de los vértices en el grafo de Cayley correspondiente.

Introducimos los espacios de Hilbert $\ell^2(X, m)$ y $\ell^2(\overrightarrow{Ar}_p(X), r)$ definiendo

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_m = \sum_{g \in X} \varphi_1(g)\varphi_2(g)m(g), \qquad \langle u_1, u_2 \rangle_r = \sum_{\overrightarrow{a} \in \overrightarrow{Ar}_p(X)} u_1(\overrightarrow{a})u_2(\overrightarrow{a})r(a).$$

El *gradiente discreto* y su adjunto son operadores lineales continuos dados por

$$\nabla : \ell^2(X, m) \to \ell^2(\overrightarrow{Ar}_p(X), r), \qquad \nabla\varphi(\overrightarrow{a}) = \frac{\varphi(\overrightarrow{a}^+) - \varphi(\overrightarrow{a}^-)}{r(a)},$$

$$\nabla^* : \ell^2(\overrightarrow{Ar}_p(X), r) \to \ell^2(X, m), \qquad \nabla^* u(g) = \frac{1}{m(g)} \left(\sum_{\overrightarrow{a}^+ = g} u(\overrightarrow{a}) - \sum_{\overrightarrow{a}^- = g} u(\overrightarrow{a}) \right).$$

El *laplaciano* (discreto) es definido por $\Delta = \frac{1}{2}\nabla^*\nabla \colon \ell^2(X,m) \to \ell^2(X,m)$. Afirmamos que una función $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ es armónica si y sólo si $\Delta\varphi = 0$. En efecto, esto se desprende de la identidad $\Delta = Id - P$:

$$\begin{aligned}
2\Delta\varphi(g) &= \frac{1}{m(g)}\left(\sum_{a^+=g}\nabla\varphi(a) - \sum_{a^-=g}\nabla\varphi(a)\right)\\
&= \frac{1}{m(g)}\left(\sum_{a^+=g}\frac{\varphi(g)-\varphi(a^-)}{r(a)} - \sum_{a^-=g}\frac{\varphi(a^+)-\varphi(g)}{r(a)}\right)\\
&= \varphi(g)\sum_{a^+=g}p(g\to h) + \varphi(g)\sum_{a^-=g}p(g\to h) - \sum_{a^+=g}p(g\to h)\varphi(h) - \sum_{a^-=g}p(g\to h)\varphi(h).\\
&= 2\big[\varphi(g) - P(\varphi)(g)\big].
\end{aligned}$$

De manera un poco más general, a cada subconjunto A de X podemos asociar un nuevo operador P_A de suerte que $p_A(g\to h)$ es igual a $p(g\to h)$ o a 0 de acuerdo a si g y h pertenecen simultáneamente a A o no. La función de Green correspondiente viene dada por

$$G_A(g,h|x) = \sum_{n\geq 0} p_A^{(n)}(g\to h)x^n.$$

Esta función corresponde a la solución fundamental del laplaciano, en el sentido que para cada $g\in A$ la función $\varphi : A \to \mathbb{R}$ definida por $h \mapsto G_A(g,h|1)$ verifica $(Id_A - P_A)\varphi(h) = \delta_g(h)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(Id_A - P_A)\varphi(h) = G_A(g,h|1) - \sum_{f\in X} G(g,f|1)p_A(f\to h) &= \\
= \sum_{n\geq 0} p_A^{(n)}(g\to h) - \sum_{n\geq 1} p_A^{(n)}(g\to h) = p^{(0)}(g\to h) &= \delta_g(h).
\end{aligned}$$

Si $\varphi : X \to \mathbb{R}$ es una función arbitraria (de cuadrado no necesariamente integrable), su *norma de Dirichlet* es

$$D(\varphi) = D_P(\varphi) = \langle\nabla\varphi,\nabla\varphi\rangle_r = \sum_{\overrightarrow{a}\in\overrightarrow{Ar}_p(X)} \frac{(\varphi(\overrightarrow{a}^+) - \varphi(\overrightarrow{a}^-))^2}{r(a)} = \sum_{g,h\in X}(\varphi(g)-\varphi(h))^2 m(g)p(g\to h).$$

El espacio $\mathcal{D}(X)$ de las funciones de norma de Dirichlet finita es solamente pre-hilbertiano. Sin embargo, si designamos por $\ell_0(X)$ al espacio de las funciones de soporte finito sobre X, y por $\mathcal{D}_0(X)$ al cierre de $\ell_0(X)$ en $\mathcal{D}(X)$, entonces $\mathcal{D}_0(X)$ es de Hilbert. Vale la pena remarcar la desigualdad $D_{P^k}(\varphi) \leq k^2 D_P(\varphi)$, la cual se obtiene por la desigualdad de Cauchy-Schwarz de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
D_{P^k}(\varphi) &= \sum_{g_0,\ldots,g_k\in X}(\varphi(g_k)-\varphi(g_0))^2 m(g_0)p(g_0\to g_1)\cdots p(g_{k-1}\to g_k)\\
&\leq \sum_{g_0,\ldots,g_k\in X} k\sum_{i=1}^{k}(\varphi(g_i)-\varphi(g_{i-1}))^2 m(g_0)p(g_0\to g_1)\cdots p(g_{k-1}\to g_k)\\
&= k\sum_{i=1}^{k}\sum_{g_i\in X}\sum_{g_0,\ldots,g_{i-1}\in X}\sum_{g_{i+1},\ldots,g_k\in X}(\varphi(g_i)-\varphi(g_{i-1}))^2 m(g_0)p(g_0\to g_1)\cdots p(g_{k-1}\to g_k)\\
&= k\sum_{i=1}^{k}\sum_{g_i\in X}\sum_{g_0,\ldots,g_{i-1}\in X}(\varphi(g_i)-\varphi(g_{i-1}))^2 m(g_0)p(g_0\to g_1)\cdots p(g_{i-1}\to g_i)\\
&= k\sum_{i=1}^{k}\sum_{g_i\in X}\sum_{g_0,\ldots,g_{i-1}\in X}(\varphi(g_i)-\varphi(g_{i-1}))^2 m(g_{i-1})p(g_1\to g_0)\cdots p(g_{i-1}\to g_{i-2})p(g_{i-1}\to g_i)\\
&= k\sum_{i=1}^{k}\sum_{g_{i-1},g_i\in X}(\varphi(g_i)-\varphi(g_{i-1}))^2 m(g_{i-1})p(g_{i-1}\to g_i) \quad = \quad k^2 D_P(\varphi).
\end{aligned}$$

El lema a continuación es de vital importancia.

Lema 2.1.2. *Si la caminata es transiente, entonces para todo $g \in X$ la función $h \mapsto G(h, g|1)$ pertenece a $\mathcal{D}_0(X)$.*

Demostración. Si g pertenece a un subconjunto finito A de X y $\varphi \in \ell_0(X)$ tiene su soporte contenido en A, entonces

$$\begin{aligned}\langle \nabla\varphi, \nabla G_A(g, \cdot|1)\rangle_r &= \langle \varphi, \nabla^* \nabla G_A(g, \cdot|1)\rangle_m = \langle \varphi, (Id - P) G_A(g, \cdot|1)\rangle_m \\ &= \langle \varphi, (Id_A - P_A) G_A(g, \cdot|1)\rangle_m = \langle \varphi, \delta_g\rangle_m = m(g)\varphi(g).\end{aligned}$$

De esta forma, si A_i es una sucesión creciente de partes finitas de X cuya reunión es igual a X, entonces

$$D(G_{A_i}(g, \cdot|1) - G_{A_j}(g, \cdot|1)) = m(g)(G_{A_i}(g, g|1) - G_{A_j}(g, g|1)).$$

En particular, $(G_{A_i}(g, \cdot|1))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}_0(X)$, y como en el caso transiente ella converge puntualmente a $G(g, \cdot|1)$, vemos que esta última función pertenece a $\mathcal{D}_0(X)$. □

La *capacidad* de un subconjunto A de X es definida por

$$\begin{aligned}cap(A) &= \inf\{D(\varphi) \colon \varphi \in \ell_0(X), \varphi(g) = 1 \text{ para todo } g \in A\} \\ &= \min\{D(\varphi) \colon \varphi \in \mathcal{D}_0(X), \varphi(g) = 1 \text{ para todo } g \in A\}.\end{aligned}$$

Para $g \in X$ designamos simplemente por $cap(g)$ la capacidad del conjunto $\{g\}$.

Un *flujo evanescente* partiendo desde $g \in X$ con impulso $I \in \mathbb{R}$ es una función $u \in \ell^2(\overrightarrow{Ar}_p(X), r)$ tal que

$$\nabla^* u(h) = -\frac{I}{m(g)} \delta_g(h).$$

La *energía* de u es $\langle u, u\rangle_r$. Intuitivamente, podemos pensar las aristas de nuestro grafo como siendo cañerías llenas de agua, y un flujo evanescente de energía finita nos da posibilidad de inyectar al sistema I unidades de volumen de agua por cada unidad de tiempo a través de la "llave de entrada" g, sin que por ello el sistema "explote".

Proposición 2.1.3. *Para caminatas aleatorias reversibles, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *la caminata es transiente,*

(ii) *para algún (todo) $g \in X$ existe un flujo evanescente de energía finita partiendo desde g con impulso no nulo,*

(iii) *para algún (todo) $g \in X$ se tiene $cap(g) > 0$,*

(iv) *la función constante e igual a 1 no pertenece a $\mathcal{D}_0(X)$.*

Demostración. Si la caminata es transiente, entonces para cada $g \in X$ la función $G(\cdot, g|1)$ pertenece a $\mathcal{D}_0(X)$. Luego, el flujo $u = -I\nabla G(\cdot, g|1)/m(g)$ pertenece a $\ell^2(\overrightarrow{Ar}_p(X))$ y satisface

$$\nabla^* u(h) = \frac{I}{m(g)} \Delta G(h, g|1) = -\frac{I}{m(g)} \delta_g(h).$$

Supongamos ahora que existe un flujo evanescente u de energía finita partiendo desde $g \in X$ con impluso $I \neq 0$. Para toda $\varphi \in \ell_0(X)$ satisfaciendo $\varphi(g) = 1$ se tiene entonces

$$-\langle \nabla\varphi, u\rangle_r = -\langle \varphi, \nabla^* u\rangle_m = \left\langle \varphi, \frac{I\delta_g}{m(g)} \right\rangle_m = I\varphi(g) = I,$$

lo cual implica que $I^2 \leq D(\varphi)\langle u, u\rangle_r$. Luego, por definición, $cap(g) \geq I^2/\langle u, u\rangle_r > 0$.

El hecho que la condición (iii) de la proposición sea equivalente a (iv) resulta inmediatamente de la definición de capacidad.

Finalmente, supongamos que $1 \notin \mathcal{D}_0(X)$ y sea $g \in X$ un vértice arbitrario. Fijemos un subconjunto finito A de X conteniendo a g. La función $\varphi = G_A(\cdot, g|1)/G_A(g, g|1)$ partenece a $\mathcal{D}_0(X)$ y verifica $\varphi(g) = 1$. Luego,

$$cap(g) \leq D(\varphi) = \frac{m(g)}{G_A(g, g|1)},$$

de lo cual se deduce que $G_A(g, g|1) \leq m(g)/cap(g)$. Ampliando A y pasando al límite se deduce que $G(g, g|1) \leq m(g)/cap(g)$, lo que muestra que la caminata es transiente. □

El lector podría sorprenderse del reiterado uso de funciones de Green en la demostración anterior. Sin embargo, ello se justifica por la siguiente aseveración: en el caso transiente, el flujo evanesceste de menor energía partiendo desde $g \in \Gamma$ con impulso $I \neq 0$ está dado por $u = -I\nabla G(\cdot, g|1)/m(g)$. En efecto, si u es un flujo partiendo desde g con impulso I, entonces podemos escribir $u = \bar{u} - I\nabla G(\cdot, g|1)/m(g)$, donde $\nabla^* \bar{u} = 0$. Obtenemos así

$$\begin{aligned}
\langle u, u\rangle_r &= \langle \bar{u}, \bar{u}\rangle_r - 2\big\langle \bar{u}, I\frac{\nabla G(g, \cdot|1)}{m(g)}\big\rangle + \big\langle I\frac{\nabla G(g, \cdot|1)}{m(g)}, I\frac{\nabla G(g, \cdot|1)}{m(g)}\big\rangle \\
&\geq -2\big\langle \bar{u}, I\frac{\nabla G(g, \cdot|1)}{m(g)}\big\rangle + \big\langle I\frac{\nabla G(g, \cdot|1)}{m(g)}, I\frac{\nabla G(g, \cdot|1)}{m(g)}\big\rangle \\
&= -2\big\langle \nabla^* \bar{u}, I\frac{G(\cdot, g|1)}{m(g)}\big\rangle + \big\langle I\frac{\nabla G(\cdot, g|1)}{m(g)}, I\frac{\nabla G(\cdot, g|1)}{m(g)}\big\rangle \\
&= \big\langle I\frac{\nabla G(\cdot, g|1)}{m(g)}, I\frac{\nabla G(\cdot, g|1)}{m(g)}\big\rangle,
\end{aligned}$$

con la igualdad si y sólo si $\langle \bar{u}, \bar{u}\rangle_r = 0$, es decir, si y sólo si $u = -I\nabla G(\cdot, g|1)/m(g)$. Observe que la energía de u es igual a

$$\langle u, u\rangle_r = \frac{I^2\langle \nabla G(g, \cdot|1), \nabla G(g, \cdot|1)\rangle_r}{m(g)^2} = \frac{I^2 G(g, g|1)}{m(g)}.$$

Un corolario interesante de la condición (iii) de la proposición 2.1.3 es el hecho que si existe una constante $\lambda > 0$ tal que $D_Q(\varphi) \geq \lambda D_P(\varphi)$ para toda $\varphi \in \ell_0(X)$ y si la caminata es P-transiente, entonces ella es Q-transiente. Observe que la condición $D_Q(\varphi) \geq \lambda D_P(\varphi)$ se verifica por ejemplo cuando $c_Q(g, h) \geq \lambda c_P(g, h)$ para todo g, h en X.

Ejemplo 2.1.4. Cada intervalo $a_k = [k-1, k]$, $k \in \mathbb{N}$, corresponde a una arista del árbol de vértices $\{0, 1, \ldots\}$. La caminata a los vecinos dada por las probabilidades de transición $p(k-1 \to k)$ y $p(k \to k-1)$, $k \in \mathbb{N}$, es reversible respecto a

$$m(0) = 1, \quad m(k) = \frac{p(0 \to 1)p(1 \to 2) \cdots p(k-1 \to k)}{p(k \to k-1) \cdots p(2 \to 1)p(1 \to 0)} \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{N},$$

$$r(a_k) = \frac{p(k-1 \to k-2) \cdots p(1 \to 0)}{\mu(0 \to 1) \cdots p(k-1 \to k)}.$$

En el caso transiente, el único flujo evanescente partiendo desde el origen con impulso $I = 1$ es el flujo constante igual a 1. Dicha función tiene energía total igual a $\sum_k r(a_k)$. Luego, la caminata es recurrente si y sólo si $\sum_k r(a_k) = \infty$, es decir si y sólo si la "resistencia total es infinita".???

Ejemplo 2.1.5. Consideremos una partición (disjunta) $X = \cup_{i \in \mathcal{I}} X_i$ (del conjunto de los vértices) de un grafo X. Si cada función característica $\mathcal{X}_{X_i}$ pertenece a $\mathcal{D}_0(X)$, entonces podemos considerar la caminata sobre $\mathcal{I}$ de conductancias $c'(i, i) = 0$ para todo $i \in \mathcal{I}$ y

$$c'(i, j) = \sum_{g \in X_i, h \in X_j} c(g, h), \quad i \neq j.$$

Se verifica fácilmente que $m'(i) = \sum_{j\in\mathcal{I}} c'(i,j) = 2D(\mathcal{X}_{X_i}) < \infty$. Obtenemos así una caminata reversible sobre $\mathcal{I}$ de probabilidades de transición $p'(i,j) = c'(i,j)/m'(i)$.

Afirmamos que bajo las condiciones anteriores, si la caminata inducida sobre $\mathcal{I}$ es recurrente, entonces también lo es la caminata original sobre X. En efecto, si la caminata sobre $\mathcal{I}$ es recurrente entonces la función constante igual a 1 pertenece a $\mathcal{D}_0(\mathcal{I})$. En otras palabras, existe una sucesión (u_n) en $\ell_0(\mathcal{I})$ tal que $D_{p'}(u_n - 1)$ tiende a 0. Definiendo $\bar{u}_n \in \mathcal{D}_0(X)$ por $\bar{u}_n(g) = u_n(i)$ si $g \in X_i$, se comprueba fácilmente que $D_{p'}(u_n - 1) = D_p(\bar{u}_n - 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, 1 pertenece a $\mathcal{D}_0(X)$, lo cual prueba la recurrencia.

Ejercicio 2.1.6. Usando el criterio del ejemplo precedente, pruebe nuevamente que la caminata aleatoria simple sobre $\mathbb{Z}^2$ es recurrente (sugerencia: descomponga $\mathbb{Z}^2$ en los conjuntos de nivel respecto a la función distancia al origen).

2.2 Comparación de Caminatas Aleatorias

Asociado a un operador de difusión P hay un operador dual P^* actuando en el espacio de las medidas por

$$P^*(\upsilon)(g) = \sum_{h\in X} \upsilon(h)p(h \to g).$$

Decimos que υ es *excesiva* respecto a P si es supra-armónica respecto a P^*, es decir, si para todo g se tiene

$$\upsilon(g) \geq P^*(\upsilon)(g) = \sum_{h\in X} \upsilon(h)p(h \to g).$$

Observe que la medida trivial $m(g) = 1$ es evidentemente excesiva. En general, si υ es excesiva y $\varphi \in \ell^2(X, \upsilon)$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle P\varphi, \varphi\rangle_\upsilon &= \sum_{g\in X} \varphi(g) \left(\sum_{h\in X} p(g \to h)\varphi(h) \right) \upsilon(g) \;\leq\; \sum_{g\in X}\sum_{h\in X} \upsilon(g)p(g\to h)\left(\frac{\varphi^2(g)}{2} + \frac{\varphi^2(h)}{2}\right) \\
&= \sum_{g\in X} \upsilon(g)\frac{\varphi^2(g)}{2} + \sum_{h\in X} \frac{\varphi^2(h)}{2}\left(\sum_{g\in X} \upsilon(g)p(g\to h)\right) \leq \sum_{g\in X}\upsilon(g)\frac{\varphi^2(g)}{2} + \sum_{h\in X}\upsilon(h)\frac{\varphi^2(h)}{2} = \langle\varphi,\varphi\rangle_\upsilon.
\end{aligned}$$

El siguiente lema general para espacios de Hilbert tiene un interés en sí mismo.

Lema 2.2.1. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y T_1, T_2 dos operadores lineales invertibles de $\mathcal{H}$ tales que:*

(i) T_1 *es autoadjunto,*

(ii) $\langle T_2(\varphi), \varphi\rangle \geq \langle T_1(\varphi), \varphi\rangle \geq 0$ *para todo* $\varphi \in \mathcal{H}$.

Entonces para todo $\varphi \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\langle T_1^{-1}(\varphi), \varphi\rangle \geq \langle T_2^{-1}(\varphi), \varphi\rangle$$

Demostración. Por la hipótesis (ii), el operador T_1 define una forma cuadrática positiva semidefinida, a saber

$$(\varphi, \psi) = \langle \varphi, T_1(\psi)\rangle.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a dicha forma obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle T_2^{-1}(\varphi), \varphi\rangle^2 &= \langle T_2^{-1}(\varphi), T_1T_1^{-1}(\varphi)\rangle^2 = (T_2^{-1}(\varphi), T_1^{-1}(\varphi))^2 \\
&\leq (T_2^{-1}(\varphi), T_2^{-1}(\varphi))\ (T_1^{-1}(\varphi), T_1^{-1}(\varphi)) = \langle T_2^{-1}(\varphi), T_1T_2^{-1}(\varphi)\rangle\ \langle T_1^{-1}(\varphi), T_1T_1^{-1}(\varphi)\rangle \\
&\leq \langle T_2^{-1}(\varphi), T_2T_2^{-1}(\varphi)\rangle\ \langle T_1^{-1}(\varphi), T_1T_1^{-1}(\varphi)\rangle = \langle T_2^{-1}(\varphi), \varphi\rangle\ \langle T_1^{-1}(\varphi), \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

de donde se concluye la desigualdad deseada. □

Damos ahora el criterio de comparación más importante entre caminatas reversibles y no reversibles.

Proposición 2.2.2. *Sean P un operador de transición irreducible y υ una medida excesiva respecto a P. Sea Q un operador de transición reversible de conductancia total m. Supongamos que*

(i) $\sup_{g\in X} m(g)/\upsilon(g) < \infty$,

(ii) $P \geq \lambda Q$ *para cierto* $\lambda > 0$.

Entonces la recurrencia respecto a P implica la recurrencia respecto a Q.

Demostración. Sea ψ la función acotada dada por $\psi(g) = m(g)/\upsilon(g)$, para la cual fijamos una constante $C > 0$ tal que $\psi \leq C$. Consideremos la caminata perezosa asociada $\bar{P} = (I + P)/2$ (cuyo coeficiente de pereza es $1/2$) y hagamos

$$\bar{Q} = \left(1 - \frac{\psi}{2C}\right) I + \frac{\psi Q}{2C},$$

es decir

$$\bar{q}(g \to h) = \left(1 - \frac{\psi(g)}{2C}\right) \delta_g(h) + \frac{\psi(g)q(g \to h)}{2C}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lambda \leq 1/2$.

Afirmamos que el operador $(\bar{P} - \lambda\bar{Q})/(1 - \lambda)$ es de transición y que la medida υ es excesiva respecto a él. Para verificar esto, observemos primeramente que, siendo υ excesiva respecto a P, también lo es respecto a $\bar{P}$. Además, $\bar{Q}$ es reversible con conductancia υ, pues de la igualdad $\psi\upsilon = m$ se deduce, para $g \neq h$,

$$\upsilon(g)\bar{q}(g \to h) = \frac{m(g)q(g \to h)}{2C} = \frac{m(h)q(h \to g)}{2C} = \upsilon(h)\bar{q}(h \to g).$$

Finalmente, como $P \geq \lambda Q$ y $\lambda \leq 1/2$, se comprueba rápidamente que se tiene también $\bar{P} \geq \lambda\bar{Q}$. Todo lo anterior prueba lo afirmado.

El operador $(\bar{P} - \lambda\bar{Q})/(1 - \lambda)$ actúa entonces sobre $\ell^2(X, \upsilon)$, y para toda $\varphi \in \ell^2(X, \upsilon)$ y todo $x \in]0, 1]$ se tiene

$$x\langle(\bar{P} - \lambda\bar{Q})\varphi, \varphi\rangle_\upsilon \leq (1 - \lambda)\langle\varphi, \varphi\rangle_\upsilon,$$

es decir,

$$\langle\lambda(I - x\bar{Q})\varphi, \varphi\rangle_\upsilon \leq \langle(I - x\bar{P})\varphi, \varphi\rangle_\upsilon. \tag{2.1}$$

Hagamos $T_1 = \lambda(I - x\bar{Q})$ y $T_2 = I - x\bar{P}$. Como $\bar{P}$ y $\bar{Q}$ son contracciones y $x < 1$, T_1 y T_2 son invertibles, teniéndose además $\langle T_1\varphi, \varphi\rangle \geq 0$ y $\langle T_2\varphi, \varphi\rangle \geq 0$. La desigualdad (2.1) no es otra cosa que $\langle T_1\varphi, \varphi\rangle \leq \langle T_2\varphi, \varphi\rangle$. Finalmente, siendo $\bar{Q}$ un operador autoadjunto, T_1 también lo es. Las hipótesis del lema (2.2.1) son así satisfechas, y la conclusión de dicho lema estipula que para toda φ se tiene $\langle T_2^{-1}\varphi, \varphi\rangle \leq \langle T_1^{-1}\varphi, \varphi\rangle$. Observe ahora que

$$\begin{aligned} T_2^{-1}\varphi(g) &= \sum_{n\geq 0} x^n \bar{P}^n \varphi(g) = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{h\in X} \bar{p}^{(n)}(g \to h)\varphi(g) \\ &= \sum_{h\in X} \left(\sum_{n\geq 0} x^n \bar{p}^{(n)}(g \to h)\right) \varphi(h) = \sum_{h\in X} G_{\bar{P}}(g, h|x)\varphi(h), \end{aligned}$$

y análogamente

$$T_1^{-1}\varphi(g) = \frac{1}{\lambda} \sum_{h\in X} G_{\bar{Q}}(g, h|x)\varphi(h).$$

Para $\varphi = \delta_g$ obtenemos entonces

$$G_{\bar{P}}(g, g|x) \leq G_{\bar{Q}}(g, g|x)/\lambda.$$

Ahora bien, por el ejemplo 1.2.3,

$$G_{\bar{P}}(g, g|x) = \frac{1}{1 - x/2} G_P\left(g, g\middle|\frac{x}{2 - x}\right), \tag{2.2}$$

de modo que, haciendo tender x a 1 por abajo obtenemos

$$G_P(g,g|1) \leq 2G_{\bar{Q}}(g,g|1)/\lambda.$$

La recurrencia respecto a P implica entonces la recurrencia respecto a $\bar{Q}$.

Finalmente, observe que para toda $\varphi \in \ell_0(X)$ se tiene

$$D_{\bar{Q}}(\varphi) = \sum_{g,h\in X} (\varphi(g)-\varphi(h))^2 \upsilon(g)\bar{q}(g \to h) = \sum_{g,h\in X} (\varphi(g)-\varphi(h))^2 m(g)\frac{q(g\to h)}{2C} = \frac{D_Q(\varphi)}{2C}.$$

Luego, la recurrencia respecto a $\bar{Q}$ implica la recurrencia respecto a Q. □

Ejemplo 2.2.3. Si P_1 y P_2 son reversibles para la misma conductancia m, y si $\tau \in]0,1[$ es tal que la caminata asociada al operador de transición $\tau P_1 + (1-\tau)P_2$ es recurrente, entonces tanto P_1 como P_2 inducen caminatas recurrentes. Esto resulta inmediatamente de la proposición anterior.

Ejemplo 2.2.4. La hipótesis según la cual el operador Q es reversible con conductancia que verifica la desigualdad $m(g)/\upsilon(g) \leq C$ es esencial para la validez de la proposición anterior. En efecto, del ejemplo 1.2.2 se desprende que la caminata Q sobre $(\mathbb{Z},+)$ con probabilidades de transición ρ y ϱ a los vecinos es transiente cuando $\rho \neq \varrho$. Sin embargo, dicha caminata es "comparable" a la caminata simple P, la cual es recurrente. El problema radica en que la conductancia m para la cual Q es reversible verifica $m(k) = m(0)(\varrho/\rho)^k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto no es uniformemente acotada.

Recuerde que, en un grafo cualquiera, la caminata simple es reversible para $m(g) = grad(g)$.

Corolario 2.2.5. Sea P un operador de transición para una caminata aleatoria uniformemente irreducible en un grafo de geometría finita. Supongamos que υ sea una medida excesiva respecto a P satisfaciendo $\inf_g \upsilon(g) > 0$. Entonces la recurrencia respecto a P implica la recurrencia respecto a la caminata simple.

Demostración. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tales que para todo par de vecinos g,h exista $n \leq k$ tal que $p^{(n)}(g \to h) \geq \varepsilon$. Hagamos $\bar{P} = (1+P)/2$ y $\hat{P} = \bar{P}^k$. Como ya hemos observado, de la igualdad (2.2) se deduce que la recurrencia respecto a P implica la recurrencia respecto a $\bar{P}$. Ahora, si $\bar{P}$ es recurrente entonces para algún $n \in \{1,\ldots,k\}$ la serie $\sum_{m\geq 0} \bar{p}^{(mk+n)}(g \to g)$ es divergente. Siendo $\bar{P}$ mayor o igual a $1/2$, para un tal n tenemos

$$\sum_{m\geq 0} \hat{p}^{(m)}(g \to g) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} \sum_{m\geq 0} \bar{p}^{(mk+n)}(g\to g) = \infty,$$

lo cual implica la recurrencia de $\hat{P}$.

Observe que υ es $\hat{P}$-excesiva. Por otro lado, $\hat{P}$ domina a un múltiplo positivo de la caminata simple. En efecto, si g y h son vecinos, entonces

$$\hat{p}(g,h) \geq \frac{\varepsilon}{2^k} \geq \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \frac{1}{grad(g)}.$$

Finalmente, siendo X de geometría finita y teniéndose $\inf_g \upsilon(g) > 0$, se tiene $\sup_g m(g)/\upsilon(g) < \infty$. El hecho que la caminata simple sea recurrente resulta entonces como consecuencia de la proposición 2.2.2. □

Una caminata reversible (X,p) es dicha *controladamente reversible* si existe una constante $C > 0$ tal que $C^{-1} \leq m(g) \leq C$ para todo g. Esta terminología es ampliamente justificada por el siguiente resultado.

Teorema 2.2.6. *Si X es un grafo de geometría finita sobre el que está definida una caminata uniformemente irreducible, controladamente reversible y de rango acotado, entonces la recurrencia (resp. transiencia) para ella implica la recurrencia (resp. transiencia) para toda otra caminata satisfaciendo dichas propiedades.*

Demostración. Sean (X, P) la caminata original y (X, Q) la caminata simple. Probaremos que existen constantes positivas α y β tales que $\alpha D_Q \leq D_P \leq \beta D_Q$. Esto implicará que si (X, P') es otra caminata verificando las hipótesis, entonces $\alpha' D_{P'} \leq D_P \leq \beta' D_{P'}$ para ciertos $\alpha' > 0$ y $\beta' > 0$, probando la afirmación del teorema (vea la condición (iii) de la proposición 2.1.3).

Con las notaciones de la demostración del corolario precedente, notemos en primer lugar que, para toda $\varphi \in \ell_0(X)$,

$$D_{\hat{P}}(\varphi) \leq k^2 D_{\bar{P}}(\varphi) = \frac{k^2}{2} D_P(\varphi).$$

Además,

$$m(g)\hat{p}(g \to h) \geq \frac{\varepsilon}{2^k} C^{-1} = \bar{\varepsilon}.$$

Se deduce fácilmente entonces que para $\alpha = 2\bar{\varepsilon}/k^2$ se tiene la desigualdad $\alpha D_Q \leq D_P$.

Para probar la otra desigualdad, observe que para todo g, h en X, $\gamma \in \gamma(g, h)$ y $\varphi \in \ell_0(X)$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos da

$$(\varphi(g) - \varphi(h))^2 \leq dist(g, h) \sum_{a \in \gamma} (\nabla\varphi(a))^2,$$

por lo que

$$(\varphi(g) - \varphi(h))^2 \leq \frac{dist(g, h)}{|\gamma(g, h)|} \sum_{\gamma \in \gamma(g,h)} \sum_{a \in \gamma} (\nabla\varphi(a))^2,$$

Luego, para toda $\varphi \in \ell_0(X)$,

$$D_P(\varphi) = \sum_{g,h \in X} c(g, h)(\varphi(g) - \varphi(h))^2 \leq \sum_{g,h \in X} \frac{dist(g, h)}{|\gamma(g, h)|} \sum_{\gamma \in \gamma(g,h)} \sum_{a \in \gamma} (\nabla\varphi(a))^2 c(g, h) = \sum_{a \in \overrightarrow{Ar}_p(X)} (\nabla\varphi(a))^2 \phi(a),$$

donde

$$\phi(a) = \sum_{g,h \in X} m(g)p(g \to h)\, dist(g, h) \frac{|\gamma_a(g, h)|}{|\gamma(g, h)|}$$

y $\gamma_a(g, h)$ designa al conjunto de geodésicas que unen g, h y contienen la arista a. Si verificamos que ϕ es uniformemente acotada, entonces para $\beta = \sup_a \phi(a)$ se tendrá $D_P(\varphi) \leq \beta D_Q(\varphi)$.

Sean M una cota para el grado de los vértices y D una cota para el rango de P (si $p(g \to h) \neq 0$ entonces $dist(g, h) \leq D$). Fijada una arista a, existen a los más M^D opciones de elección de elementos g, h tales que $a \in \gamma \in \gamma(g, h)$ y $p(g \to h) > 0$. Por lo tanto,

$$\phi(a) \leq CD \sum_{dist(g,h) \leq D} \frac{|\gamma_a(g, h)|}{|\gamma(g, h)|} \leq CDM^{2D},$$

lo cual culmina la demostración. □

Ejercicio 2.2.7. Si X y X' son grafos de geometría finita y $R : X \to X'$ una quasi-isometría, pruebe que existe una constante $\lambda > 0$ tal que para toda $\varphi \in \ell_0(X')$ se tiene

$$D_{X'}(\varphi) \geq \lambda D_X(\varphi \circ R).$$

Aplicando esta desigualdad a una quasi-inversa de R concluya que, bajo las hipótesis anteriores, la recurrencia (transiencia) de la caminata simple sobre un grafo es equivalente a la recurrencia o transiencia de la caminata simple sobre el otro grafo. En otras palabras, "la recurrencia es preservada por quasi-isometrías".

2.3 Crecimiento de Grupos Recurrentes

Dados un grupo Γ y un sistema (finito) de generadores $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_k\}$, la *función de crecimiento* $V : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es aquélla que asocia a $r \in \mathbb{N}$ el cardinal $V(r)$ de la bola $B(e, r)$ de centro e y radio r en el grafo de Cayley correspondiente. El grupo Γ tiene crecimiento polinomial si existe un polinomio P tal que $V(r) \leq P(r)$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Si tal es el caso, el grado mínimo que puede tener un polinomio verificando dicha propiedad es llamado el *grado de crecimiento* de Γ. Se dice que Γ tiene crecimiento exponencial (resp. subexponencial) si $V(r)^{1/r}$ converge a un límite mayor que (resp. igual a) 1 (observe que, por el lema 4.1.1, la expresión $V(r)^{1/r}$ es convergente). Las nociones introducidas anteriormente son invariantes bajo cambio de sistema de generadores.

Ejercicio 2.3.1. Pruebe que si un grupo tiene crecimiento polinomial de grado n respecto a un sistema (finito) de generadores, entonces ocurre lo mismo respecto a cualquier otro sistema (finito) de generadores.

Por los ejercicios 2.0.8 y 2.2.7, podemos hablar de la recurrencia o transiencia de la caminata aleatoria simple en un grupo (finitamente generado) de manera independiente del sistema (finito) de generadores. Tal recurrencia queda parcialmente caracterizada (en términos de crecimiento) por los resultados presentados a continuación.

Teorema 2.3.2. *Si un grupo tiene crecimiento polinomial de grado inferior o igual a* 2*, entonces la caminata aleatoria simple sobre él es recurrente.*

Demostración. Por hipótesis, existe $c < \infty$ tal que $m(B(e,n))/n^2 = V(n)/n^2 \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la partición $\Gamma = \cup_{n \geq 0} X_n$, donde X_n es la esfera de centro e y radio n, es decir

$$X_n = \{g \in \Gamma : \ dist(e, g) = n\}.$$

Considerando el acortamiento correspondiente de la caminata (vea el ejemplo 2.1.5), se tiene

$$c'(n, n+1) = \sum_{g \in X_n, h \in X_{n+1}} c(g,h) \ \leq \ m(B(e, n+1)) - m(B(e,n)).$$

La desigualdad entre medias aritméticas y armónicas implica

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{c'(k-1,k)} \geq \frac{n^2}{\sum_{k=n+1}^{2n} c'(k-1,k)} = \frac{n^2}{m(B(e,2n)) - m(B(e,n))} \geq \frac{n^2}{m(B(e,2n))} \geq \frac{1}{4c}.$$

Se deduce entonces que la serie $\sum_k r'(k-1,k)$ diverge. Por el ejemplo 2.1.4, la caminata es recurrente. $\square$

Observe la analogía entre la demostración precedente y aquélla sugerida para el ejercicio 2.1.6: el teorema 2.3.2 nos ratifica el hecho que la caminata simple sobre $\mathbb{Z}^2$ es recurrente. Para grupos de crecimiento superior (para los cuales debiésemos a estas alturas sospechar la transiencia), la situación es más compleja.

Denotando por $\mathbb{E}(\cdot)$ la esperanza de una variable aleatoria, definimos el k-ésimo *momento* (partiendo desde e) de una medida de probabilidad simétrica μ sobre Γ por

$$M_k(\mu) = \mathbb{E}\big(h \mapsto dist(e,h)^k\big) = \sum_{n \geq 0} n^k \Big(\sum_{dist(e,h) = n} p(e \to h) \Big).$$

Un argumento simple de homogeneidad muestra que $M_k(\mu) = \mathbb{E}\big(h \mapsto dist(g,h)^k\big)$ para todo $g \in \Gamma$.

Lema 2.3.3. *Si* Γ *es un grupo un grupo finitamente generado para el cual existe una constante* $c > 0$ *tal que* $V(k) \geq ck^3$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*, entonces existe una medida de probabilidad simétrica y de segundo momento finito sobre* Γ *que induce una caminata aleatoria transiente.*

Demostración. Para $n \geq 2$ definamos $\varepsilon_n = 1/n^3 \log^2(n)$, y hagamos $\varepsilon_1 = 1 - \sum_{n\geq 2} \varepsilon_n$. Afirmamos que la medida de probabilidad μ sobre Γ dada por

$$\mu(g) = \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n \mathcal{X}_{B(e,n)}(g)}{m(B(e,n))}$$

satisface las afirmaciones de la proposición. Para verificar esto, notemos en primer lugar que

$$M_2(\mu) = \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{m(B(e,n))} \sum_{g\in\Gamma} dist(e,g)^2 \mathcal{X}_{B(e,n)}(g) \leq \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n n^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n \log^2(n)} < \infty.$$

Por otra parte, como g está en $B(e,n)$ si y sólo si g^{-1} pertenece a $B(e,n)$, la medida μ es simétrica. Resta entonces verificar que la caminata asociada a μ es transiente. Para ello, para cada $k \in \mathbb{N}$ descompongamos μ escribiéndola como suma de dos medidas (defectivas) μ_1 y μ_2, con

$$\mu_1(g) = \sum_{n<k} \frac{\varepsilon_n \mathcal{X}_{B(e,n)}(g)}{m(B(e,n))}.$$

Haciendo $s_k = \sum_{n\geq k} \varepsilon_n$ se obtiene $\mu_1(\Gamma) = 1 - s_k$ y $\|\mu_2\|_\infty = \sup_{g\in\Gamma} \mu_2(g) \leq s_k/m(B(e,k))$. Se verifica fácilmente por inducción que en general se tiene

$$\|\mu^{*(n)}\|_\infty \leq \mu_1(\Gamma)^n + n\|\mu_2\|_\infty,$$

lo cual nos da en nuestro caso particular

$$\mu^{*(n)}(e) \leq (1 - s_k)^n + n\frac{s_k}{V(k)}.$$

Dejamos al lector la tarea de verificar que $s_k k^2 \log^2(k)$ tiende a $1/2$ (para verificar esto, basta integrar por partes la función $x \mapsto 1/x^3 \log^2(x)$). Como $V(k) \geq ck^3$, usando la desigualdad $1 - t \leq e^{-t}$ obtenemos, para ciertas constantes c_1 y c_2,

$$p^{(n)}(e \to e) \leq \exp\left(-\frac{c_1 n}{k^2 \log^2(k)}\right) + \frac{c_2 n}{k^5 \log^2(k)}$$

para todo n y k suficientemente grandes. Colocando $k = k(n) = n^{2/5}$, lo anterior se reduce a

$$p^{(n)}(e \to e) \leq \exp\left(-\frac{c_3 n^{1/5}}{\log^2(n)}\right) + \frac{c_4}{n \log^2(n)},$$

probando la convergencia de $\sum_n p^{(n)}(e \to e)$. La caminata asociada a μ es por lo tanto transiente. $\square$

El lema siguiente es un refinamiento para medidas de segundo momento finito de una de las vertientes del criterio dado por el teorema 2.2.6.

Lema 2.3.4. *Sean Γ un grupo finitamente generado y μ una medida de probabilidad simétrica y de segundo momento finito sobre Γ. Si la caminata (Γ, μ) es transiente, entonces la caminata simple sobre Γ es transiente.*

Demostración. Sean P el operador de transición asociado a μ y Q aquél asociado a la caminata simple. Basta probar que existe $\beta > 0$ tal que $D_P \leq \beta D_Q$. Para ello, al igual que en la demostración de la segunda parte del teorema 2.2.6, debemos probar que la función $\phi \colon \overrightarrow{Ar}_p(\Gamma) \to X$ dada por

$$\phi(a) = \sum_{g,h\in\Gamma} m(g)p(g \to h)\, dist(g,h) \frac{|\gamma_a(g,h)|}{|\gamma(g,h)|} = \sum_{g,h\in\Gamma} \mu(g^{-1}h)\, dist(e, g^{-1}h) \frac{|\gamma_{g^{-1}(a)}(e, g^{-1}h)|}{|\gamma(e, g^{-1}h)|}$$

es acotada superiormente. Afirmamos que se tiene $\phi(a_0) \leq M_2(\mu)$ para toda arista a_0 del grafo de Cayley de Γ. En efecto, a partir de la identidad

$$\sum_{a \in \overrightarrow{Ar}_p(\Gamma)} \frac{|\gamma_a(e,g)|}{|\gamma(e,g)|} = \frac{1}{|\gamma(e,g)|} \sum_{\gamma \in \gamma(e,g)} |\{a \in \gamma\}| = dist(e,g),$$

se deduce

$$\begin{aligned} \phi(a_0) &= \sum_{g,h \in \Gamma} \mu(g^{-1}h)\ dist(e,g^{-1}h) \frac{|\gamma_{g^{-1}(a_0)}(e,g^{-1}h)|}{|\gamma(e,g^{-1}h)|} = \sum_{f \in \Gamma} \mu(f)\ dist(e,f) \sum_{g \in \Gamma} \frac{|\gamma_{g^{-1}a}(e,f)|}{|\gamma(e,f)|} \\ &\leq \sum_{f \in \Gamma} \mu(f)\ dist(e,f) \sum_{a \in \overrightarrow{Ar}_p(\Gamma)} \frac{|\gamma_{g^{-1}a}(e,f)|}{|\gamma(e,f)|} = \sum_{f \in \Gamma} \mu(f)\ dist(e,f)^2 = M_2(\mu). \end{aligned}$$

□

El teorema siguiente resulta ahora como corolario de los lemas 2.3.3 y 2.3.4.

Teorema 2.3.5. *Si Γ es un grupo un grupo finitamente generado para el cual existe una constante $c > 0$ tal que $V(k) \geq ck^3$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces la caminata aleatoria simple sobre Γ es transiente.*

A partir del corolario 2.2.5 concluimos que un grupo Γ satisfaciendo $V(n) \geq cn^3$ para alguna constante positiva c no admite ninguna medida de probabilidad simétrica cuya caminata aleatoria inducida sea (irreducible y) recurrente. Para grupos de crecimiento polinomial de grado inferior o igual a 2, toda caminata asociada a una probabilidad simétrica (irreducible) y de segundo momento finito es recurrente. Sin embargo, existen medidas de probabilidad simétricas sobre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^2$ de segundo momento infinito que inducen caminatas (irreducibles y) transientes.

Ejercicio 2.3.6. Dado $\varepsilon \in]0,1[$, considere la medida de probabilidad μ sobre $\mathbb{Z}$ definida por $\mu(n) = c/|n|^{1+\varepsilon}$ para $n \neq 0$ y $\mu(0) = 0$, donde $1/c = 2\sum_{n \geq 1} 1/n^{1+\varepsilon}$. Verifique que el segundo momento de μ es infinito, y pruebe que la caminata aleatoria inducida es transiente.

2.4 Clasificación de grupos según su crecimiento

Para acabar nuestra discusión en torno a la recurrencia (y en particular concluir la demostración del teorema 2.0.6) debemos clasificar los grupos de acuerdo a su crecimiento. El siguiente resultado, debido a Gromov, responde a esta problemática.

Teorema 2.4.1. *Si Γ es un grupo de crecimiento polinomial de grado a lo más 2, entonces Γ es ya sea finito o bien una extensión de $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}^2$. Si el crecimiento de Γ no está acotado por ningún polinomio de grado 2, entonces existe una constante positiva c tal que $V(n) \geq cn^3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

A decir verdad, el teorema anterior es una consecuencia de (la demostración de) otro resultado (el genuino "teorema de Gromov"), además de algunos aspectos básicos de la teoría de los grupos nilpotentes. Hasta hoy, la mejor fuente de estudio para todo esto sigue siendo el célebre artículo [17] y las referencias allí dadas.

Teorema 2.4.2. *Un grupo (finitamente generado) tiene crecimiento polinomial si y sólo si contiene un subgrupo nilpotente de índice finito. En tal caso, la función de crecimiento es equivalente a un polinomio.*

La demostración del teorema precedente reposa sobre ideas geométricas apasionantes pero que no tienen mayor relación con los métodos probabilísticos usados en este capítulo. Un problema no totalmente desprovisto de interés sigue siendo el encontrar una demostración simple y directa para el teorema 2.4.1.

Ejercicio 2.4.3. El grupo de Heisenberg (discreto) de orden n es aquél cuyos elementos son las matrices triangulares superiores de entradas enteras y unos sobre la diagonal. Verifique que dicho grupo es nilpotente de orden de nilpotencia $n-1$. Pruebe que el grupo de Heisenberg de orden 3 tiene crecimiento polinomial de grado 4. Bosqueje el grafo de Cayley de dicho grupo respecto a un sistema natural de generadores.

Capítulo 3

Función de recurrencia e isoperimetría

Dos funciones F, G de $\mathbb{N}$ en $[0, \infty[$ son dichas *asintóticamente equivalentes* si existen constantes enteras c, c', d, d' tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$F(n) \leq c\,G(dn), \qquad G(n) \leq c' F(d'n).$$

Utilizaremos la notación $F \simeq G$ para indicar que F y G son asintóticamente equivalentes. De manera un poco más general, una función F *domina* a G (lo cual se denota $F \succeq G$) si existen constantes A, B tales que $F(n) \geq c\,G(dn)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, dos funciones son equivalentes si y sólo si ellas se dominan mutuamente.

El primer objetivo de este capítulo es presentar una prueba del siguiente resultado debido a Pittet y Saloff-Coste [27].

Teorema 3.0.4. *Si Γ y Γ' son dos grupos quasi-isométricos y P, P' son operadores en $\ell^2(\Gamma)$ y $\ell^2(\Gamma')$ respectivamente que verifican las condiciones ?, entonces*

$$\langle P^{2n}(\delta_e), \delta_e \rangle \simeq \langle (P')^{2n} \delta_{e'}, \delta_{e'} \rangle.$$

En particular, el tipo asintótico de la función $n \mapsto \langle P^{2n}(\delta_e), \delta_e \rangle$ no depende del sistema (finito) de generadores del grupo en cuestión.

Observe que $\langle P^{2n} \delta_e, \delta_e \rangle$ corresponde a la probabilidad $p^{(2n)}(e \to e)$ de volver al origen en $2n$ pasos.

3.1 Asintótica de la tasa de retorno al origen

Tal como veremos en el próximo capítulo, para una amplia familia de grupos (a saber, los grupos *no promediables*) se tiene

$$p^{(2n)}(e \to e) \simeq \exp(-n).$$

Ejemplos importantes de grupos promediables son los de crecimiento subexponencial. En particular, para los grupos de crecimiento polinomial tenemos el siguiente resultado de Varopoulos.

Teorema 3.1.1. *Si Γ es un grupo de crecimiento polinomial de grado d, entonces*

$$\langle P^{2n}(\delta_e), \delta_e \rangle \simeq n^{-d/2}.$$

A continuación damos una serie de otros ejemplos relevantes de grupos promediables con la correspondiente asintótica para la función de retorno al origen.

Ejemplo 3.1.2. Si $\Gamma = \big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big) \wr \mathbb{Z}^d$ entonces

$$p^{(2n)}(e \to e) \simeq \exp(-n^{d/(d+2)}).$$

Ejemplo 3.1.3. Si $\Gamma = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^d$ entonces

$$p^{(2n)}(e \to e) \simeq \exp\Big(-n^{d/(d+2)}(\log(n))^{2/(d+2)}\Big).$$

Ejemplo 3.1.4. Si Γ es policíclico y no virtualmente nilpotente, entonces

$$p^{(2n)}(e \to e) \simeq \exp(-n^{1/3}).$$

En lo que sigue daremos la prueba completa de la estimación del ejemplo 3.1.2.

3.1.1 Estimaciones inferiores

Para un operador de difusión arbitrario P, el laplaciano asociado $\Delta = Id - P$ es positivo y simétrico. Para cada subconjunto finito A de Γ resulta entonces natural considerar

$$\lambda_1(A) = \inf_{\varphi \neq 0, sop(\varphi) \subset A} \frac{\langle \Delta\varphi, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_2^2}.$$

Proposición 3.1.5. *Si $\lambda_1(A)$ es suficientemente pequeño entonces*

$$p^{(2n)}(e \to e) \succeq \frac{\exp(-n\lambda_1(A))}{|A|}.$$

Demostración. Las igualdades siguientes son evidentes:

$$|A|\, p^{(2n)}(e \to e) = \sum_{g \in A} \langle P^{2n}(\delta_g), \delta_g \rangle = \sum_{g \in A} p^{(2n)}(g \to g). \tag{3.1}$$

Consideremos el operador submarkoviano P_A dado por

$$p_A(g \to h) = \begin{cases} p(g \to h) & \text{si } g, h \text{ están en } A, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Este operador P_A actúa sobre el espacio de Hilbert (de dimensión finita) $\ell^2(A)$. Si $\Delta_A = 1 - P_A$ designa el laplaciano correspondiente, entonces Δ_A es un operador autoadjunto y positivo. Denotando por

$$0 \leq \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \ldots \leq \lambda_{|A|}(A)$$

los valores propios correspondientes, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{g \in A} p^{(2n)}(g \to g) &\geq \sum_{g \in A} p_A^{(2n)}(g \to g) \\ &= Tr\,(P_A^{2n}) \\ &= \sum_{i=1}^{|A|} (1 - \lambda_i(A))^{2n} \\ &\geq (1 - \lambda_1(A))^{2n} \\ &\succeq \exp(-n\lambda_1(A)), \end{aligned}$$

lo cual permite concluir la demostración. $\square$

Consideremos ahora el operador de transición P asociado a la caminata aleatoria simple (respecto a un sistema simétrico de generadores $\mathcal{G}$). Para cada subconjunto finito A de Γ y cada $k \in \mathbb{N}$ denotemos

$$A_k = \{g \in A \colon dist(g, \Gamma \setminus A) \geq k\}.$$

Lema 3.1.6. *Con las notaciones precedentes, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene la desigualdad*

$$\lambda_1(A) \leq \frac{|A|}{k^2\,|A_k|}.$$

Demostración. Consideremos la función $\varphi : \Gamma \to [0, \infty[$ dada por $\varphi(g) = dist(g, \Gamma \setminus A)$. Tenemos

$$\|\varphi\|_2^2 = \sum_{g\in\Gamma} \varphi(g)^2 \geq |A_k|\,k^2,$$

y

$$\langle \Delta\varphi, \varphi\rangle = \frac{1}{2}\big\langle \nabla^*\nabla\varphi, \varphi\big\rangle = \frac{1}{2}\big\langle \nabla\varphi, \nabla\varphi\big\rangle = \frac{1}{2}\sum_{g,h} \big|\varphi(g) - \varphi(h)\big|^2 p(g \to h) \leq \sum_{g\in A, h\in\mathcal{G}} 1 = |A|,$$

lo cual permite concluir la afirmación del lema. $\square$

Estamos ahora en condiciones de probar la estimación inferior para el ejemplo 3.1.2. Para $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}^d$ consideremos

$$A(\ell) = \big\{(\eta, g)\colon \|g\|_{\mathbb{Z}^d} \leq n,\ \ \eta(g) = 0 \ \text{ si } \ \|g\|_{\mathbb{Z}^d} > n\big\}.$$

Se tiene evidentemente $|A(\ell)| = \ell^d 2^{\ell^d}$. Consideremos el subconjunto $\bar{A}(\ell)$ de $A(\ell)$ dado por

$$\bar{A}(\ell) = \big\{(\eta, g) \in A(\ell)\colon \|g\|_{\mathbb{Z}^d} \leq \ell/2\big\}.$$

Claramente, $|\bar{A}(\ell)| = (\ell/2)^d 2^{\ell^d}$. Puesto que $\bar{A}(\ell) \subset A(\ell)_{\ell/2}$, el lema 3.1.6 nos da

$$\lambda_1(A(\ell)) \leq \frac{\ell^d 2^{\ell^d}}{\ell^2(\ell/2)^d 2^{\ell^d}} \simeq \frac{1}{\ell^2}.$$

Por la proposición 3.1.5,

$$p^{(2n)}(e \to e) \succeq \exp\left(-\frac{n}{\ell^2} - \ell^d\right).$$

Escogiendo ℓ de modo que $n/\ell^2 \simeq \ell^d$ se concluye finalmente que

$$p^{(2n)}(e \to e) \succeq \exp(-n^{d/(d+2)}).$$

3.1.2 Estimaciones superiores

Las ideas geométricas para la estimación superior son más elaboradas. Para comenzar, dados un grupo Γ y un operador de Markov P verificando las hipótesis ???, consideremos la función $\Lambda_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Lambda_P(s) = \inf_{|A|\leq s} \lambda_1(A).$$

Lema 3.1.7. *Para toda función $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ de soporte finito se tiene la desigualdad*

$$\|\varphi\|_2^2 \leq \frac{2\,\langle\Delta\varphi, \varphi\rangle}{\Lambda_P\left(\frac{4\|\varphi\|_1^2}{\|\varphi\|_2^2}\right)}.$$

Demostración. De la desigualdad

$$\big\langle \Delta\varphi, \varphi\big\rangle = \frac{1}{2}\sum_{g,h}\big(\varphi(g) - \varphi(h)\big)^2 p(g \to h) \geq \frac{1}{2}\sum_{g,h}\big(|\varphi(g)| - |\varphi(h)|\big)^2 p(g \to h) = \big\langle \Delta|\varphi|, |\varphi|\big\rangle,$$

se concluye que basta con considerar el caso en que φ es no negativa. Supongamos que éste sea el caso y para $t \geq 0$ definamos

$$(\varphi - t)^+(g) = \begin{cases} \varphi(g) - t & \text{si } \varphi(g) \geq t, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se tiene entonces la desigualdad

$$\varphi(x)^2 \leq (\varphi - t)^+(x)^2 + 2t\varphi(x),$$

por lo que

$$\|\varphi\|_2^2 \leq \|(\varphi - t)^+\|_2^2 + 2t\|\varphi\|_1.$$

Puesto que, por definición,

$$\|(\varphi - t)^+\|_2^2 \leq \frac{1}{\Lambda(|\mathrm{sop}(\varphi - t)^+|)} \big\langle \Delta(\varphi - t)^+, (\varphi - t)^+ \big\rangle \leq \frac{\langle \Delta(\varphi - t), \varphi - t\rangle}{\Lambda(|\mathrm{sop}(\varphi - t)^+|)} = \frac{\langle \Delta\varphi, \varphi\rangle}{\Lambda(|\mathrm{sop}(\varphi - t)^+|)},$$

si denotamos

$$F_t = \mathrm{sop}(\varphi - t)^+ = \{g : \varphi(g) > t\}$$

entonces concluimos que

$$\|\varphi\|_2^2 \leq \frac{1}{\Lambda(|F_t|)} \langle \Delta\varphi, \varphi\rangle + 2t\|\varphi\|_1. \tag{3.2}$$

Escogiendo t de modo que $2t\|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_2^2/2$ y utilizando la desigualdad elemental $|F_t| \leq t^{-1}\|\varphi\|_1$, vemos que (3.2) se transforma en

$$\frac{\|\varphi\|_2^2}{2} \leq \frac{\langle \Delta\varphi, \varphi\rangle}{\Lambda\left(\frac{4\|\varphi\|_1^2}{\|\varphi\|_2^2}\right)},$$

tal como queríamos demostrar. □

Puesto que el operador inverso P^{-1} también es Markoviano tenemos

$$\langle \Delta\varphi, \varphi\rangle = \langle (Id - P)\varphi, \varphi\rangle = \|\varphi^2\|_2^2 - \langle P(\varphi), \varphi\rangle \leq \|\varphi\|_2^2 - \|P(\varphi)\|_2^2,$$

por lo que la desigualdad del lema precedente puede escribirse de la forma

$$\|\varphi\|_2^2 \leq \frac{2}{\Lambda_P\left(\frac{4\|\varphi\|_1^2}{\|\varphi\|_2^2}\right)} \big(\|\varphi\|_2^2 - \|P(\varphi)\|_2^2\big).$$

La proposición siguiente, debida a Nash, permite lidear con una desigualdad de este tipo.

Proposición 3.1.8. *Sea $N : [1,\infty[\to]0,\infty[$ una función continua no decreciente. Si para toda función $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ de soporte finito se tiene*

$$\|\varphi\|_2^2 \leq N\left(\frac{\|\varphi\|_1^2}{\|\varphi\|_2^2}\right) \big(\|\varphi\|_2^2 - \|P(\varphi)\|_2^2\big),$$

entonces $\psi(n) \geq p^{(2n)}(e \to e)$, donde $\psi : [0,\infty[\to]0,1]$ es la única función satisfaciendo $\psi(0) = 1$ y

$$t = \int_1^{1/\psi(t)} \frac{N(s)}{s}\, ds.$$

Demostración. Observemos primeramente que, como N es no nula y no decreciente, para $F(x) = \int_0^x \frac{N(s)}{s} ds$ se tiene $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$. Esto muestra que ψ está bien definida. Puesto que, $F(1/\psi(t)) = t$, derivando formalmente tenemos

$$F'\Big(\frac{1}{\psi(t)}\Big)\Big(\frac{1}{\psi(t)}\Big)' = 1,$$

lo cual nos da

$$\frac{N(1/\psi(t))}{1/\psi(t)} \cdot \frac{-\psi'(t)}{\psi(t)^2} = 1,$$

es decir

$$-\psi'(t) = \frac{\psi(t)}{N(1/\psi(t))}.$$

A partir de este cálculo (*a priori* formal) es fácil deducir la diferenciabilidad de ψ.

Escojamos ahora φ de norma $\|\varphi\|_1 = 1$ y denotemos $u(n) = \|P^n(\varphi)\|_2^2$, donde $n \geq 0$. La hipótesis de la proposición implica inmediatamente que

$$u(n) \leq N\left(\frac{1}{u(n)}\right)\big(u(n) - u(n+1)\big).$$

Consideremos la extensión afín por partes $u\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ de la sucesión $(u(n))$. La función u así obtenida es no creciente, y para todo $t \geq 1$ no entero se verifica

$$u(t) \leq N\Big(\frac{1}{u(t)}\Big) \cdot (-u'_+(t)). \tag{3.3}$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned} u(n) - u(n+1) &= \langle P^{2n}(\varphi), \varphi\rangle - \langle P^2 P^{2n}(\varphi), \varphi\rangle \\ &= \langle (Id - P^2)P^{2n}(\varphi), \varphi\rangle \\ &= \|(Id - P^2)^{1/2} P^n(\varphi)\|_2^2 \\ &\leq \|(Id - P^2)^{1/2} P^{n-1}(\varphi)\|_2^2 \\ &= u(n-1) - u(n). \end{aligned}$$

Luego,

$$u(n) \leq N\Big(\frac{1}{u(n)}\Big)\big(u(n-1) - u(n)\big),$$

de donde se deduce que, para todo $t \geq 1$,

$$u(t) \leq N\Big(\frac{1}{u(t)}\Big) \cdot (-u'_-(t)). \tag{3.4}$$

Si consideramos el caso particular de la función $\varphi = \delta_e$ vemos que $u(0) = 1$ y $u(n) = p^{(2n)}(e,e)$. Puesto que $\psi(0) = 1$ y

$$-\psi'(t) = \frac{\psi(t)}{N(\frac{1}{\psi(t)})} \quad \text{para todo } t \geq 1,$$

un argumento sencillo de comparación con (3.3) y (3.4) muestra entonces que $\psi(n) \geq p^{(2n)}(e \to e)$. $\square$

Podemos usar entonces la función $N(t) = 2/\Lambda_P(4t)$ en la desigualdad de Nash. Para estimar la función ψ correspondiente, necesitamos encontrar una buena cota inferior para la función Λ_P. Para esto nos valdremos de la famosa desigualdad de Cheeger que pasamos a describir (vea ??? para una demostración).

Dado un operador de Markov P y un subconjunto finito Ω de Γ,

$$\partial_P A = \big\{(g,h) \in \Gamma \times \Gamma \colon c(g,h) = p(g \to h) > 0, g \in A, h \notin A\big\}.$$

Se tiene entonces

$$\lambda_1(A) \geq \frac{1}{2} \inf_{U \subset A} \left(\frac{c(\partial_P U)}{|U|}\right)^2.$$

Recordemos ahora la definición de la función de Følner $F_\Gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ asociada a un grupo promediable dada por (vea ??? para mayores detalles)

$$F_\Gamma(n) = \min_{A \subset \Gamma} \Big\{|A| : \frac{|\partial A|}{|A|} \leq \frac{1}{n}\Big\}.$$

Proposición 3.1.9. *Para $\Gamma = \big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big) \wr \mathbb{Z}^d$ se tiene la equivalencia $F_\Gamma \simeq 2^{n^d}$.*

Demostración. La proposición resulta casi inmediatamente de un resultado de Erschler, quien en [11] establece la relación (bajo ciertas hipótesis técnicas) citar a Gromov ???

$$F_{H \wr G} \simeq (F_H)^{F_G}.$$

Las hipótesis técnicas son satisfechas en este caso particular, por lo que la afirmación resulta de las relaciones $F_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \equiv 2$ y $F_{\mathbb{Z}^d}(n) \simeq n^d$. □

Para concluir, consideremos un subconjunto arbitrario A de $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}^d$ y elijamos $n \in \mathbb{N}$ minimal de modo que $|A| < F_\Gamma(n)$. Por definición tenemos

$$\frac{|\partial A|}{|A|} \geq \frac{1}{n} \simeq \frac{1}{(\log(|A|))^{1/d}},$$

por lo que la desigualdad de Cheeger nos da

$$\lambda_1(A) \succeq \frac{1}{\log(|A|)^{2/d}}.$$

Para $N(s) = (\log(s))^{2/d}$ tenemos entonces, por la desigualdad de Nash, $p^{(2t)}(e,e) \leq \psi(t)$, donde ψ verifica $\psi(0) = 1$ y

$$t = \int_1^{1/\psi(t)} \frac{(\log(s))^{2/d}}{s} ds = (\log(s))^{\frac{2}{d}+1}\Big|_1^{1/\psi(t)}.$$

La relación precedente nos da $\psi(s) = \exp(-s^{d/(d+2)})$, concluyendo así la verificación de la relación

$$p^{(2t)}(e \to e) \preceq \exp(-t^{d/(d+2)}).$$

3.2 Desigualdades isoperimétricas

3.2.1 Una desigualdad de Varopoulos

Sea A un subconjunto finito de un grupo infinito Γ generado por un sistema finito $\mathcal{G}$. Dado un radio positivo r, consideremos los trasladados Ag, donde $g \in B(e,r)$. El promedio de la masa de A perdida por estas traslaciones es igual a

$$\frac{1}{|B(e,r)|} \sum_{g \in B(e,r)} \sum_{h \in Ag} \big(1 - \mathcal{X}_A(h)\big) = \sum_{h \in A} \frac{1}{|B(e,r)|} \sum_{g \in B(e,r)} \big(1 - \mathcal{X}_A(hg^{-1})\big) = \sum_{h \in A} \frac{|B(h,r)| - |B(h,r) \cap A|}{|B(h,r)|}.$$

Si escogemos $r = r(|A|)$ de manera tal que $|B(e,r)| \sim 2|A|$, entonces cada sumando de la expresión anterior está acotado inferiormente por $1/2|\mathcal{G}|$, por lo que el valor de dicha expresión es mayor o igual que $|A|/2|\mathcal{G}|$. Por otra parte, afirmamos que el promedio de masa perdida es inferior o igual a $r|\partial A|$, lo cual implica que

$$r|\partial A| \geq \frac{|A|}{2|\mathcal{G}|}. \tag{3.5}$$

En efecto, para que un punto logre "escapar" de A, éste debe "pasar" por su frontera al ser movido por el "flujo" asociado a cada elemento de $B(e,r)$. De manera más precisa, escribamos cada $g \in B(e,r)$ de la forma $g = g_1 \cdots g_n$, donde $\|g\| = n \leq r$ y cada g_i está en $\mathcal{G}$. Fijado $f \in \partial A$ denotamos

$$\mathrm{Fl}_f(g) = \{h \in A\colon\ hg \notin A \ \text{ y } \ hg_1 \ldots g_m = f \ \text{ para algún } \ m \leq m\}.$$

Claramente,

$$\Big| \bigcup_{f \in \partial A} \mathrm{Fl}_f(g) \Big| \leq r|\partial A|,$$

lo cual implica lo afirmado.

Si Γ tiene crecimiento polinomial, entonces existe $d \in \mathbb{N}$ de modo que $V(r) = |B(e,r)| \sim r^d$ (ver §2.4), por lo que la desigualdad (3.5) nos da, para alguna constante $c > 0$,

$$c|A|^{1/d}|\partial A| \geq |A|,$$

es decir

$$|A| \leq C|\partial A|^{\frac{d}{d-1}}.$$

Esta desigualdad isoperimétrica para grupos (casi) nilpotentes fue obtenida originalmente por Pansu para el caso particular del grupo de Heisenberg. Si Γ tiene crecimiento exponencial, entonces un razonamiento análogo muestra que

$$|\partial A| \geq \frac{C|A|}{\log(|A|)}.$$

hacer monito ???

Ejemplo 3.2.1. Para $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ (provisto del sistema estándar de generadores) tenemos

$$\frac{|\partial B(e,n)|}{|B(e,n)|} \simeq \frac{n^{d-1}}{n^d} = \frac{1}{n},$$

por lo que la función de Følner asociada satisface $F(n) \preceq |B(e,n)| \simeq n^d$. Por otra parte, la desigualdad probada anteriormente muestra que si un subconjunto finito $A \subset \mathbb{Z}^d$ satisface $|\partial A|/|A| \leq 1/n$, entonces $c|A|^{\frac{d-1}{d}}/|A| \leq 1/n$, por lo que $|A| \geq \bar{c}n^d$. Esto muestra que $F(n) \succeq n^d$, y conjuntamente con lo anterior conluimos que $F(n) \simeq n^d$.

3.2.2 La desigualdad de Cheeger

...

Capítulo 4

Promediabilidad

4.1 La condición $\lambda(\Gamma) = 1$

Salvo mención de lo contrario, en este capítulo sólo consideraremos medidas de probabilidad simétricas induciendo caminatas irreducibles. Cuando μ es una probabilidad simétrica sobre un grupo Γ, el operador de transición $P = P_\mu$ actuando en $\ell^2(\Gamma, \mu)$ es autoadjunto, por lo que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{p^{(n)}(e \to e)} = \|P\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \langle P\varphi, \varphi\rangle. \tag{4.1}$$

Llamamos *taza de retorno al origen* al valor dado por la expresión anterior, al cual denotamos por $\lambda(\Gamma, \mu)$. Observemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $p^{(n)}(e \to e) \leq 1$, por lo que $\lambda(\Gamma, \mu) \leq 1$.

El siguiente lema es bien conocido y su demostración puede ser dejada a cargo del lector. Recuerde que una sucesión que satisface la hipótesis 4.1.1 para $c = k = 0$ es dicha *subaditiva*.

Lema 4.1.1. *Si (a_n) es una sucesión de números reales para la cual existen constantes $c \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que para todo m, n en $\mathbb{N}$ se verifica la desigualdad*

$$a_{m+n+k} \leq a_m + a_n + c, \tag{4.2}$$

entonces la sucesión (a_n/n) converge a un límite $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, teniéndose además $a = \underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n/n)$.

Proposición 4.1.2. Para cualquier caminata aleatoria (Γ, μ) se tiene la igualdad

$$\lambda(\Gamma, \mu) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{p^{(2n)}(e \to e)}.$$

Demostración. Observe que

$$p^{(2n)}(e \to e) = \sum_{g\in\Gamma} p^{(n)}(e \to g)p^{(n)}(g \to e) \geq [p^{(n)}(e \to e)]^2,$$

lo cual implica

$$\sqrt[2n]{p^{(2n)}(e \to e)} \geq \sqrt[n]{p^{(n)}(e \to e)}.$$

En particular,

$$\lambda(\Gamma, \mu) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[2n]{p^{(2n)}(e \to e)} \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{p^{(n)}(e \to e)} = \lambda(\Gamma, \mu),$$

de donde

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[2n]{p^{(2n)}(e \to e)} = \lambda(\Gamma, \mu). \tag{4.3}$$

Por otra parte,

$$p^{(2r+2s)}(e \to e) = \sum_{g\in\Gamma} p^{(2r)}(e \to g)p^{(2s)}(g \to e) \geq p^{(2r)}(e \to e)p^{(2s)}(e \to e),$$

por lo que la expresión $[p^{(2n)}(e \to e)]^{1/2n}$ corresponde al n-ésimo témino de una sucesión convergente (basta aplicar el lema 4.1.1 a la sucesión (a_n) definida por $a_n = -\log(p^{(n)}(e \to e))$). Concluimos que el límite superior (4.3) es en realidad un límite, necesariamente igual a $\lambda(\Gamma, \mu)$. $\square$

Observación 4.1.3. Si $\mu(e \to e) > 0$ entonces $\lambda(\Gamma, \mu) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p^{(n)}(e \to e)}$. En efecto, en dicho caso se tiene de manera evidente

$$p^{(2n+1)}(e \to e) \geq p(e \to e)p^{(2n)}(e \to e),$$

por lo que tomando la raíz $(2n+1)$-ésima y pasando al límite se obtiene lo afirmado gracias al lema anterior.

En general, es bastante difícil determinar el valor de $\lambda(\Gamma, \mu)$. Sin embargo, si Γ tiene una estructura algebraica muy particular y μ se adecúa a dicha estructura, entonces pueden obtenerse algunos valores precisos. Para ello, puede hacerse uso del hecho que $\lambda(\Gamma, \mu)$ no es otra cosa que el inverso del radio de convergencia de la serie de Green asociada a μ.

Ejemplo 4.1.4. Para caminatas perezosas se cumple la relación

$$\lambda(\Gamma, \tau\delta_e + (1-\tau)\mu) = \tau + (1-\tau)\lambda(\Gamma, \mu). \tag{4.4}$$

Esta igualdad se deduce inmediatamente de (4.1), pero puede ser obtenida también sobre la base de los argumentos dados en el ejemplo 1.2.3. Señalemos que, en general, la función $\mu \mapsto \lambda(\Gamma, \mu)$ verifica la desigualdad de convexidad

$$\lambda\big(\Gamma, \tau\mu_0 + (1-\tau)\mu_1\big) \;\leq\; \tau\lambda(\Gamma, \mu_0) + (1-\tau)\lambda(\Gamma, \mu_1). \tag{4.5}$$

En efecto, debido a (4.4) podemos suponer que $\mu_0(e)$ y $\mu_1(e)$ son ambos positivos. La expresión a izquierda en (4.5) coincide entonces con

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\tau\mu_0 + (1-\tau)\mu_1)^{*(n)}(e)\Big)^{1/n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \tau^i(1-\tau)^{n-i}\mu_0^{*(i)}(e)\mu_1^{*(n-i)}(e)\right)^{1/n}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ escojamos $N \in \mathbb{N}$ de modo que, para todo $n \geq N$,

$$\mu_0^{*(n)}(e) \leq \big(\lambda(\Gamma, \mu_0) + \varepsilon/2\big)^n < \big(\lambda(\Gamma, \mu_0) + \varepsilon\big)^n \quad \text{ y } \quad \mu_1^{*(n)}(e) \leq \big(\lambda(\Gamma, \mu_1) + \varepsilon/2\big)^n < \big(\lambda(\Gamma, \mu_0) + \varepsilon\big)^n.$$

La expresión $\sum_{i=0}^{n} \tau^i(1-\tau)^{n-i}\mu_0^{*(i)}(e)\mu_1^{*(n-i)}(e)$ queda entonces mayorada por

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} \tau^i(1-\tau)^{n-i}\big(\lambda(\Gamma, \mu_0) + \varepsilon\big)^i\big(\lambda(\Gamma, \mu_0) + \varepsilon\big)^{n-i} + \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{N} \tau^i(1-\tau)^{n-i}\Big[\mu_0^{*(i)}(e)\mu_1^{*(n-i)}(e) - \big(\lambda(\Gamma, \mu_0) + \varepsilon\big)^i\big(\lambda(\Gamma, \mu_0) + \varepsilon\big)^{n-i}\Big] + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=n-N}^{n} \tau^i(1-\tau)^{n-i}\Big[\mu_0^{*(i)}(e)\mu_1^{*(n-i)}(e) - \big(\lambda(\Gamma, \mu_0) + \varepsilon\big)^i\big(\lambda(\Gamma, \mu_0) + \varepsilon\big)^{n-i}\Big].
\end{aligned}$$

El primer término corresponde a $\big(\tau\lambda(\Gamma, \mu_0) + (1-\tau)\lambda(\Gamma, \mu_1) + \varepsilon\big)^n$. Por lo tanto, si probamos que, para n suficientemente grande, cada término en las dos sumas restantes es negativo, entonces (4.5) resultará al hacer tender ε hacia cero. Siendo ambos términos análogos, consideraremos sólo el primero. Sea C el valor mínimo de $(\lambda(\Gamma, \mu_0) + \varepsilon)^i / \mu_0^{*(i)}(e)$, con $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Si $n \geq 2N$ entonces, como $i \leq N$, tenemos $n - i \geq N$, por lo que

$$\frac{\mu_1^{*(n-i)}(e)}{\big(\lambda(\Gamma, \mu_1) + \varepsilon\big)^{n-i}} \;\leq\; \left(\frac{\lambda(\Gamma, \mu_1) + \varepsilon/2}{\lambda(\Gamma, \mu_1) + \varepsilon}\right)^{n-i}.$$

Siendo la última expresión menor o igual a C para n suficientemente grande, se deduce que

$$\frac{\mu_1^{*(n-i)}(e)}{\big(\lambda(\Gamma,\mu_1)+\varepsilon\big)^{n-i}} \leq \frac{(\lambda(\Gamma,\mu_0)+\varepsilon)^i}{\mu_0^{*(i)}(e)},$$

lo cual permite concluir.

Ejemplo 4.1.5. Consideremos la medida estándar en el grupo libre a k generadores L_k. Sobre la base de los argumentos dados en el ejemplo 1.2.4, es fácil justificar que la serie $G(e, e/x)$ converge si y solamente si el valor de la expresión $k^2 - (2k-1)x^2$ es positivo, es decir si y sólo si

$$x^2 < \frac{k^2}{2k-1}.$$

Como $\lambda(L_k, \mu)$ es el inverso del radio de convergencia de $G(e, e/x)$, concluimos que

$$\lambda(L_k, \mu) = \sqrt{\frac{2k-1}{k^2}}.$$

De lo anterior se desprende que $\lambda(\mathbb{Z}, \mu) = 1$ y $\lambda(L_k, \mu) < 1$ para $k \geq 2$.

Ejemplo 4.1.6. Consideremos ahora el caso de un producto directo de un número finito de grupos, es decir $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_k$. Sobre cada Γ_i fijemos una probabilidad μ_i y sean $\tau_1, \ldots, \tau_k$ números reales positivos tales que $\tau_1 + \cdots + \tau_k = 1$. Sea μ la probabilidad sobre Γ definida por $\mu = \tau_1\mu_1 + \cdots + \tau_k\mu_k$, donde consideramos μ_i como la imagen de la medida original por la inclusión natural de Γ_i en Γ. Para esta medida μ se tiene la igualdad

$$\lambda(\Gamma, \mu) = \tau_1\lambda(\Gamma_1, \mu_1) + \cdots + \tau_k\lambda(\Gamma_k, \mu_k).$$

Daremos en lo que sigue una justificación heurística de ella. Los detalles técnicos de su verificación son similares a los del ejemplo 4.1.4 y quedarán a cargo del lector.

En primer lugar, notemos que un inductivo simple (el cual dejamos a cargo del lector) permite llevar el caso general al caso $k = 2$. Consideremos entonces una medida de probabilidad de la forma $\mu = \tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2$, donde $\tau_j > 0$ para $j \in \{1, 2\}$ y $\tau_1 + \tau_2 = 1$. Se verifica fácilmente que

$$p^{(n)}(e \to e) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \tau_1^i \tau_2^{n-i} p_1^{(i)}(e \to e) p_2^{(n-i)}(e \to e). \tag{4.6}$$

Podemos perturbar ligeramente μ_1 y μ_2 de modo que ambas medidas otorguen masa positiva al elemento neutro. Se tiene entonces $\lim_{n\to\infty}[p_j^{(n)}(e \to e)]^{1/n} = \lambda_j(\Gamma_j, \mu_j)$ para $j \in \{1, 2\}$, lo que permite pensar que la expresión de la derecha en la igualdad (4.6) se "asemeja" a

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \tau_1^i \tau_2^{n-i} \lambda_1(\Gamma_1, \mu_1)^i \lambda_2(\Gamma_2, \mu_2)^{n-i} = (\tau_1\lambda_1(\Gamma_1, \mu_1) + \tau_2\lambda_2(\Gamma_2, \mu_2))^n,$$

lo que se "traduce" en el hecho que $\lambda(\Gamma, \mu) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p^{(n)}(e \to e)}$ debe ser igual a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\tau_1\lambda_1(\Gamma_1, \mu_1) + \tau_2\lambda_2(\Gamma_2, \mu_2))^n} = \tau_1\lambda_1(\Gamma_1, \mu_1) + \tau_2\lambda_2(\Gamma_2, \mu_2).$$

En lo que sigue estudiaremos la estabilidad de la condición $\lambda(\Gamma, \mu) = 1$ bajo cambios de la medida μ. Comenzamos con una observación elemental: si N es un subgrupo normal de Γ entonces, designando también por μ a la medida inducida en Γ/N, se tiene la desigualdad $\lambda(\Gamma, \mu) \leq \lambda(\Gamma/N, \mu)$. En efecto, la probabilidad de volver al elemento neutro de Γ en n pasos es menor o igual que la probabilidad de caer en un elemento de N en igual número de pasos... El lector atento notará la similitud entre la demostración de la proposición 2.2.2 y aquélla que presentamos a continuación.

Proposición 4.1.7. *Sean Γ un grupo y H un subgrupo de Γ. Denotemos por $N = N(H)$ la clausura normal de H en Γ. Si para alguna medida de probabilidad μ' sobre H se tiene $\lambda(H, \mu') < 1$, entonces se verifica la desigualdad (estricta) $\lambda(\Gamma, \mu) < \lambda(\Gamma/N, \mu)$ para toda medida de probabilidad μ sobre Γ.*

Demostración. En primer lugar, por un argumento de paso al límite se prueba fácilmente que se puede reducir el caso general a aquél en que el soporte de μ' es finito. En lo que sigue trabajaremos bajo esta suposición. Supondremos también que $\mu(e) > 0$: si éste no es el caso, basta perturbar ligeramente μ mediante un coeficiente de pereza pequeño...

Sea k un entero positivo tal que $\mu^{*(k)}(g) > 0$ para todo $g \in sop(\mu')$. Para $\alpha > 0$ definamos

$$\mu_\alpha = (1+\alpha)\mu^{*(k)} - \alpha\mu'.$$

Observe que para $\alpha > 0$ suficientemente pequeño, μ_α es una verdadera medida de probabilidad sobre Γ: el punto importante es que la masa de cada punto por μ_α es no negativa (observe que para la validez de este argumento es esencial que los soportes de μ y de μ' sean finitos). Para $\eta \in [0,1]$ consideremos la medida $\tilde{\mu}_\eta = (1-\eta)\mu_\alpha + \eta\mu'$, obtenida como combinación convexa entre μ_α y μ'. Como la proyección de μ' en Γ/N coincide con la delta de Dirac δ_e con masa en el elemento neutro de Γ, tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda(\Gamma, \tilde{\mu}_\eta) &\leq (1-\eta)\lambda(\Gamma, \mu_\alpha) + \eta\lambda(\Gamma, \mu') \\
&< (1-\eta)\lambda(\Gamma, \mu_\alpha) + \eta \\
&\leq (1-\eta)\lambda(\Gamma/N, \mu_\alpha) + \eta \\
&= \lambda(\Gamma/N, (1-\eta)\mu_\alpha + \eta\delta_e) \\
&= \lambda(\Gamma/N, (1-\eta)\mu_\alpha + \eta\mu') \\
&= \lambda(\Gamma/N, \tilde{\mu}_\eta).
\end{aligned}$$

Haciendo $\eta = \alpha/(1+\alpha)$ se obtiene $\tilde{\mu}_\eta = \mu^{*(k)}$, y por lo tanto $\lambda(\Gamma, \mu)^k < \lambda(\Gamma/N, \mu)^k$. □

Como corolario obtenemos que, si $\lambda(\Gamma, \mu) = 1$, entonces para todo subgrupo H de Γ y toda medida de probabilidad μ' sobre H se tiene $\lambda(H, \mu') = 1$. En efecto, en caso contrario se tendría, por la proposición precedente,

$$1 = \lambda(\Gamma, \mu) < \lambda(\Gamma/N(H), \mu),$$

lo cual es absurdo. Podemos hablar entonces de la condición $\lambda(\Gamma) = 1$ independientemente de la medida de probabilidad considerada. Tiene sentido así la siguiente definición.

Definición 4.1.8. Un grupo (numerable) es *promediable* si $\lambda(\Gamma) = 1$.

Por ejemplo, el grupo $\mathbb{Z}^k$ es promediable para todo $k \in \mathbb{N}$ (ejemplos 4.1.5 y 4.1.6), mientras que L_k no lo es para ningún $k \geq 2$ (ejemplo 4.1.5).

Ejemplo 4.1.9. Todo grupo finitamente generado y de crecimiento subexponencial es promediable. Para probar esto, consideremos la medida de probabilidad simétrica y equidistribuida sobre los generadores $g_1, \ldots, g_k$ (la cual induce la caminata aleatoria simple). Denotando por $V(n)$ al cardinal de la bola de centro e y radio n en el grafo de Cayley correspondiente, del hecho que existen $(2k)^n$ caminos de largo n se deduce que hay una familia de al menos $(2k)^n/V(n)$ de tales caminos que llegan al mismo punto de dicha bola. Concatenando cada uno con el inverso de otro obtenemos al menos $(2k)^{2n}/V(n)^2$ caminos distintos de largo $2n$ del elemento neutro en sí mismo. Cada uno de estos caminos tiene probabilidad $1/(2k)^{2n}$. Concluimos así que

$$p^{(2n)}(e \to e) \geq \frac{1}{(2k)^{2n}} \cdot \left(\frac{(2k)^n}{V(n)}\right)^2 = \frac{1}{V(n)^2}.$$

Como V es una función de crecimiento subexponencial, el valor de la expresión $\sqrt[2n]{1/V(n)^2}$ tiende a 1 cuando n tiende a infinito, de donde se concluye que $\lambda = 1$.

La proposición 4.1.7 establece que al cuocientar por (la clausura normal de) un grupo no promediable, la taza de retorno al origen aumenta. La proposición siguiente estipula en cambio que dicha taza se mantiene intacta al cuocientar por un grupo promediable.

Proposición 4.1.10. *Sea N un subgrupo normal de Γ. Si $\lambda(N)=1$ entonces $\lambda(\Gamma,\mu) = \lambda(\Gamma/N,\mu)$ para toda medida de probabilidad μ sobre Γ.*

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se tiene que la probabilidad de volver al elemento neutro de Γ/N en $2n$ pasos es mayor o igual a $[(1-\varepsilon)\lambda(\Gamma/N,\mu)]^{2n}$. Fijemos un tal $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la medida de probabilidad μ_n sobre N definida por

$$\begin{aligned}\mu_n(g) \quad = \quad & \text{probabilidad condicional de llegar a } g \in N \text{ en } 2n \text{ pasos para la caminata} \\ & \text{sobre } \Gamma \text{ sabiendo que en tales } 2n \text{ pasos se cae en un elemento de } N.\end{aligned}$$

Puesto que $\lambda(N) = 1$, para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se tiene que la probabilidad (según μ_n) de volver al elemento neutro de N en $2m$ pasos es mayor o igual a $(1-\varepsilon)^{2m}$. Ahora bien, la probabilidad de volver a e en $2m \cdot 2n$ pasos es mayor o igual a la probabilidad de ir de elementos de H en elementos de N en $2m$ caminos de longitud $2n$ multiplicado por la probabilidad de ir de e a e en $2m$ pasos. Concluimos así que

$$p^{(2n\cdot 2m)}(e \to e) \geq [(1-\varepsilon)\lambda(\Gamma/N,\mu)]^{2n\cdot 2m}(1-\varepsilon)^{2m},$$

por lo que

$$\lambda(\Gamma,\mu) \geq (1-\varepsilon)^2\lambda(\Gamma/N,\mu).$$

Puesto que esto es válido para todo $\varepsilon > 0$, se concluye finalmente que $\lambda(\Gamma,\mu) = \lambda(\Gamma/N,\mu)$. □

Ejercicio 4.1.11. Pruebe que todo grupo soluble es promediable.

4.2 Funciones supra-armónicas y tasa de retorno al origen

Para $t > 0$, una función $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ es t-supra-armónica si $P_\mu(\varphi) \leq t\varphi$. Una función que verifica $P_\mu(\varphi) = t\varphi$ es dicha t-armónica. Designamos por $H_t(\mu)$ y por $S_t(\mu)$ a los espacios de las funciones t-armónicas y t-supra-armónicas respectivamente, y por $H_t^+(\mu)$ y por $S_t^+(\mu)$ a los conos positivos correspondientes. No es difícil verificar que si φ es no identicamente nula y pertenece a $S_t^+(\mu)$ entonces ella es positiva en todo punto.

Lema 4.2.1. *Se tiene la igualdad* $\lambda(\Gamma,\mu) = \min\{t > 0 : \, S_t^+(\mu) \neq \emptyset\}$.

Demostración. Si φ pertenece a $S_t^+(\mu)$ para algún $t > 0$ entonces

$$p^{(n)}(e \to e)\varphi(e) \leq P_{\mu^{*(n)}}(\varphi)(e) \leq t^n\varphi(e),$$

de donde se obtiene

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{p^{(n)}(e \to e)} \leq t,$$

probando la desigualdad $\lambda(\Gamma,\mu) \leq t$.

Para probar la desigualdad contraria, observe que si $t > \lambda(\Gamma,\mu)$ entonces la función $g \mapsto G(e, g/t^{-1})$ está bien definida y pertenece a $S_t^+(\mu)$. Fijemos una sucesión t_k decayendo hacia $\lambda = \lambda(\Gamma,\mu)$ y consideremos la sucesión de funciones φ_n definidas por $\varphi_n(g) = G(e, g/t_n^{-1})/G(e, e/t_n^{-1})$. Afirmamos que existe una subsucesión de ella que converge puntualmente a una función φ. Observe que esto completa la prueba, pues es fácil ver que φ debe necesariamente ser λ-supra-armónica y positiva.

Para probar la existencia de una subsucesión convergente, fijemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $p^{(k)}(e \to e) > 0$ y sea $T = \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n < \infty$. Para $g \in \Gamma$ tenemos

$$p^{(k)}(g \to g)\varphi_n(g) \leq P_\mu^k(\varphi_n)(g) \leq t_n^k\varphi_n(g) = t_n^k,$$

por lo que

$$\varphi_n(g) \leq \frac{T^k}{p^{(k)}(g \to g)} = \frac{T^k}{p^{(k)}(e \to e)}.$$

Como el lado derecho de esta desigualdad es independiente de n, esto prueba que para cada g podemos escoger una subsucesión de φ_n de modo que $\varphi_n(g)$ converja. La demostración se concluye entonces por un argumento diagonal de Cantor. □

Corolario 4.2.2. *Un grupo Γ es promediable si y sólo si para todo $t < 1$ y para alguna (equivalentemente, para toda) probabilidad μ sobre Γ se tiene $S_t^+(\mu) = \emptyset$.*

La convergencia de la función de Green para $x = \lambda^{-1} = \lambda(\Gamma, \mu)^{-1}$ o la existencia de funciones λ-armónicas es un asunto delicado. A manera de ejemplo presentamos el siguiente resultado, que puede ser entendido como una generalización del lema 2.0.4 del capítulo 2.

Proposición 4.2.3. *La serie que define a $G(e, e/x)$ converge para $x = \lambda^{-1}$ si y sólo si existe una función λ-armónica y positiva que es múltipla de toda función λ-supra-armónica y positiva.*

Demostración. Si (la serie que define) la función de Green $G(e, e/x)$ converge para $x = \lambda^{-1}$ entonces la función $g \mapsto G(e, g/\lambda^{-1})$ pertenece a $S_\lambda^+(\mu)$ sin ser armónica.

Recíprocamente, si $G(e, e/x)$ diverge para $x = \lambda^{-1}$, entonces toda $\varphi \in S_\lambda^+(\mu)$ es λ-armónica. En efecto, la función no negativa $\psi = \varphi - \lambda P(\varphi)$ verifica

$$\sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(g \to h)\lambda^k \psi(h) \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda^k P^k(\psi)(h) = \varphi(h) - \lambda^{k+1} P^{k+1}(\varphi)(h) \leq \varphi(h).$$

Tomando el límite cuando n tiende al infinito obtenemos $\psi(h)G(g, h/\lambda^{-1}) \leq \varphi(h)$, por lo que se debe tener necesariamente $\psi(h) = 0$. Como esto es válido para todo $h \in \Gamma$, ψ es idénticamente nula, es decir que φ es λ-armónica.

Fijemos una función λ-armónica positiva φ y consideremos las nuevas probabilidades de transición

$$\bar{p}(g \to h) = \frac{p(g \to h)\varphi(h)}{\lambda\varphi(g)}.$$

El operador de transición asociado $\bar{P}$ induce una caminata recurrente, pues

$$G_{\bar{p}}(g, h/1) = \frac{\varphi(h)}{\varphi(g)}\, G(g, h/\lambda^{-1}) = \infty.$$

Luego, por el lema 2.0.4, toda función $\bar{P}$-supra-armónica positiva es constante. Por otro lado, se comprueba fácilmente que una función ϕ es λ-supra-armónica respecto a la caminata original si y sólo si ϕ/φ es supra-armónica respecto a $\bar{P}$. La proposición queda así demostrada. □

4.3 Sucesiones de Følner

Fijemos un sistema finito y simétrico $\mathcal{G} = \{h_i, i = 1, \ldots, k\}$ de generadores de un grupo Γ. Una *sucesión de Følner* es una secuencia de subconjuntos X_n de Γ tales que, para todo $h_i \in \mathcal{G}$, se tiene

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|X_k \Delta h_i X_n|}{|X_n|} = 0,$$

donde $h_i X_n = \{h_i g, g \in X_n\}$. La siguiente es tal vez la caracterización más importante de la promediabilidad.

Teorema 4.3.1. *Un grupo finitamente generado es promediable si y sólo si admite una sucesión de Følner.*

Veamos primeramente que la existencia de una sucesión de Folner implica la promediabilidad. Consideremos la medida de probabilidad μ equidistribuida sobre los generadores: $\mu(h_i) = 1/k$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos un subconjunto X_n de Γ tal que para todo $h_i \in \mathcal{G}$,

$$\frac{|X_n \Delta h_i X_n|}{|X_n|} \ \leq\ 1 - \frac{1}{n}. \tag{4.7}$$

Recordemos que, para toda función $\varphi \in \ell^2(\Gamma,\mu)$ de norma 1,

$$\lambda(\Gamma,\mu) \geq \langle M(\Gamma,\mu)\varphi,\varphi\rangle.$$

En particular, para $\varphi_n(x) = \mathcal{X}_{X_n}/\sqrt{|X_n|}$ obtenemos

$$\lambda(\Gamma,\mu) \geq \sum_{f,g} \varphi_k(f)\mu(f \to g)\varphi_n(g).$$

Observe que el valor de $\varphi_k(f)\mu(f \to g)\varphi_k(g)$ es igual a 0 o a $1/(k \cdot card(X_n))$. El segundo caso ocurre si y sólo si $f \in X_n$, $gf^{-1} \in \mathcal{G}$ y $g \in X_n$. Fijando $i \in \{1,\ldots,k\}$, esto sucede para f y g verificando $gf^{-1} = h_i$ en un número de ocasiones igual a $card(X_n \cap h_i X_n)$. A partir de (4.7) deducimos que

$$\lambda(\Gamma,\mu) \geq \frac{1}{n \cdot |X_n|}\sum_{i=1}^{k} card(X_n \cap h_i X_n) \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Siendo esto válido para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $\lambda(\Gamma,\mu) = 1$.

DEMOSTRACION ???

Ejemplo 4.3.2. Usando la igualdad (4.1), pruebe que si μ es una medida de probabilidad sobre un grupo libre $L_k = \langle g_1,\ldots,g_k\rangle$ cuyo soporte está contenido en $\{g_1^{\pm 1},\ldots,g_k^{\pm 1}\}$, entonces

$$\lambda(L_k,\mu) \geq \sqrt{\frac{2k-1}{k^2}}.$$

Si el grupo tiene crecimiento subexponencial, entonces se puede escoger una sucesión de bolas que sea de Følner. En efecto, en caso contrario existiría una constante $\tau > 0$ tal que $|\partial B(e,n)| \geq \tau |B(e,n)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implicaría que $|B(e,n)| \geq (1+\tau)^n$, por lo que la tasa de crecimiento del grupo en cuestión sería al menos $1+\tau$, contrario a nuestra hipótesis de crecimiento subexponencial.

Sin embargo, no siempre resulta sencillo encontrar sucesiones de Følner de manera relativamente explícita para grupos promediables. Por ejemplo, y contrariamente a lo que se podría pensar, la sucesión de (todas las) bolas no constituye en general una sucesión de Følner; es el caso al menos cuando el crecimiento del grupo es exponencial. En efecto, si dicha sucesión fuese de Følner, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$|\partial B(e,n)| \leq |B(e,n)|(1+\varepsilon k),$$

donde k es el cardinal del sistema de generadores fijado en el grupo. La igualdad anterior nos daría, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|B(e,n+n_0)|^{1/(n+n_0)} \leq |B(e,n_0)|^{1/(n+n_0)}(1+\varepsilon k)^{n/(n+n_0)}.$$

Pasando al límite obtendríamos que la tasa de crecimiento del grupo sería inferior o igual a $1+\varepsilon k$. Siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, esto implicaría que dicha tasa es 1, contradiciendo la exponencialidad del crecimiento del grupo.

Veamos a continuación un ejemplo interesantísimo en que se pueden dar explícitamente las sucesiones de Følner y estudiar su crecimiento.

Definición 4.3.3. Sean Γ y H dos grupos cualesquiera. Considere la acción por traslaciones de Γ sobre $\oplus_{g\in\Gamma} H$ dada por $g(\varphi)(h) = \varphi(hg^{-1})$, donde $g,h \in \Gamma$ y $\varphi : \Gamma \to H$ representa un elemento arbitrario de $\oplus_\Gamma H$. El producto semidirecto entre Γ y $\oplus_\Gamma H$ correspondiente a esta acción es llamado el *producto en corona* entre Γ y H, y denotado por $\Gamma \wr H$.

Dadas dos familias $A = \{g_1,\ldots g_m\} \subset \Gamma$ y $B = \{h_1,\ldots,h_n\} \subset H$, denotamos por $A \dashv B$ la familia de elementos de $\Gamma \wr H$ dada por $\{(g_i,\delta_{g_j}^{h_k}) : 1 \leq i,j \leq m; 1 \leq k \leq n\}$, donde $\delta_g^h \in \oplus_\Gamma H$ corresponde a la función que asume el valor $e \in H$ en todos los puntos de Γ a excepción de $g \in \Gamma$, donde toma el valor h. Se verifica fácilmente que si A y B generan a Γ y H respectivamente, y si cada familia contiene al elemento neutro respectivo, entonces $A \dashv B$ genera $\Gamma \wr H$.

Es claro que si Γ y H son promediables entonces $\Gamma \wr H$ también lo es. Sin embargo, se satisface una propiedad más fina: si (A_n) y (B_n) son sucesiones de Følner para Γ y H respectivamente, entonces $(A_n \dashv B_n)$ es una sucesión de Følner para $\Gamma \wr H$. Puede probarse que, en cierto sentido, ésta es la mejor manera de generar sucesiones de Følner para productos en corona [11].

Ejemplo 4.3.4. Dados un grupo finitamente generado Γ y uno de sus elementos g, diremos que un subconjunto A de Γ está *g-unido* si para todo $h \in A$ al menos uno de los elementos gh o $g^{-1}h$ también pertenece a A (tales elementos serán dichos *g-unidos* a h).

Dados un grafo $\mathcal{C}$ y un subconjunto finito A de su conjunto de vértices, denotamos por $\tau(A)$ el valor mínimo para la expresión $|\gamma|/|A|$, donde γ designa un camino que recorre todos los vértices de A y $|\gamma|$ es su longitud. En el caso en que $\mathcal{C}$ sea el grafo de Cayley $\mathcal{C}(\Gamma, \mathcal{G})$ de un grupo Γ respecto a un sistema finito de generadores $\mathcal{G}$, diremos que $\mathcal{C}(\Gamma, \mathcal{G})$ satisface la *τ-condición del vendedor ambulante* $VA(\tau)$ si existe $g \in \Gamma$ tal que todo subconjunto g-unido A de Γ satisface $\tau(A) \geq \tau$.

La τ-condición del vendedor ambulante depende del sistema de generadores, en el sentido que cambiando $\mathcal{G}$ el valor de τ se modifica. Sin embargo, la *condición del vendedor ambulante* VA consistente en el cumplimiento simultáneo de todas las $VA(\tau)$ no depende de la elección del sistema (finito) de generadores.

Afirmamos que si Γ satisface VA entonces Γ no es promediable. En efecto, en caso contrario para cada $\varepsilon > 0$ podríamos escoger un subconjunto finito A_ε de Γ de modo que $card(\partial A_\varepsilon)/card(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que A_ε es conexo, de donde es fácil concluir la existencia de un camino γ recorriendo todos sus vértices tal que $|\gamma| = 2\,card(A_\varepsilon)$. Por otra parte, para cada $g \in \Gamma$ no es difícil convencerse de la existencia de una constante $C = C(g, |A_\varepsilon|)$ tal que el conjunto de puntos de A_ε que no están g-unidos a otro punto de A_ε tiene cardinalidad a lo más igual a $C\varepsilon|A_\varepsilon|$. Removiendo dichos puntos obtenemos un subconjunto g-unido A'_ε de cardinalidad superior o igual a $(1 - C\varepsilon)|A_\varepsilon|$. Concluimos así que $\tau(A'_\varepsilon) \leq 2/(1 - C\varepsilon)$. Como esto último es válido para todo $\varepsilon > 0$, la condición $VA(\tau)$ no puede ser satisfecha para ningún $\tau > 2$.

4.4 Cocrecimiento

Todo grupo finitamente generado Γ dotado de un sistema de generadores $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_k\}$ puede ser presentado como el cuociente entre el grupo libre $L_k = \langle g_1, \ldots, g_k \rangle$ y un subgrupo normal N (posiblemente trivial). Sin duda que el caso realmente interesante es aquél en que $k \geq 2$. Para este caso pretendemos relacionar N con Γ de manera más precisa. Probaremos un interesante resultado, obtenido por Grigorchuk en [15], que caracteriza la promediabilidad de Γ en términos del "cocrecimiento" de N, es decir del crecimiento de N relativo al grupo ambiente. Mencionemos que una prueba moderna de este resultado junto con algunas generalizaciones aparacen en [26].

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por N_n al conjunto de los elementos de N que se escriben como palabras reducidas en $g_1^{\pm 1}, \ldots, g_k^{\pm 1}$ de longitud igual a n. El *cocrecimiento* de Γ es definido por

$$\alpha_N = \alpha_N(g_1, \ldots, g_k) = \overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{|N_n|}.$$

El límite superior anterior no siempre es un límite genuino, pues puede darse el caso que N contenga sólo elementos representados por palabras de longitud par. Veremos sin embargo que éste es esencialmente el único problema que puede presentarse.

Afirmación (i). *Si N es no trivial entonces $\alpha_N \geq \sqrt{2k-1}$.*

Prueba. Sea V una palabra reducida no vacía representando un elemento no trivial de N. Al menos $2k-2$ palabras de la forma $g_i^\varepsilon V g_i^{-\varepsilon}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, son reducidas. Ellas representan elementos de N, pues N es normal en Γ. Si V_1 es una de estas palabras, al menos $2k-1$ palabras de la forma $g_i^\varepsilon V_1 g_i^{-\varepsilon}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, son reducidas. En efecto, si $V_1 = g_i^\varepsilon V g_i^{-\varepsilon}$ entonces basta considerar $g_j^{\varepsilon'} V_1 g_j^{-\varepsilon'}$ para $j \neq i$ o $\varepsilon' \neq \varepsilon$. Continuando inductivamente vemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, el subgrupo N contiene al menos $(2k-2)(2k-1)^{n-1}$ elementos representados por palabras reducidas de longitud $long(V) + 2n$. Esto implica que

$$\alpha_N \geq \lim_{n \to \infty} \sqrt[long(V)+2n]{(2k-2)(2k-1)^{n-1}} = \sqrt{2k-1}.$$

Observación 4.4.1. Más adelante probaremos que (si N es no trivial) en realidad se cumple la desigualdad estricta $\alpha_N > \sqrt{2k-1}$ (vea la observación 4.4.7).

Afirmación (ii). Si N es no trivial entonces, para todo m, n en $\mathbb{N}$,

$$|N_m| \cdot |N_n| \leq |N_{m+n+2}|. \tag{4.8}$$

Prueba. Si N_m o N_n es vacío entonces la afirmación es evidente. Supongamos que dichos conjuntos sean ambos no vacíos y fijemos $U \in N_m$ y $V \in N_m$. Es fácil verificar la existencia de al menos un generador g_i y de $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tales que $g_i^{\varepsilon} U g_i^{-\varepsilon} V$ es una palabra reducida de longitud $m+n+2$. Como N es normal en Γ, esta palabra representa a un elemento de N_{m+n+2}. Podemos construir así una aplicación inyectiva

$$N_m \times N_n \to N_{m+n+2},$$

de donde se concluye directamente (4.8).

Afirmación (iii). *Supongamos que N sea no trivial.*

(i) *Si N posee algún elemento de longitud impar entonces*

$$\alpha_N = \lim_{n \to \infty} |N_n|^{1/n}.$$

(ii) *En general, siempre se tiene*

$$\alpha_N = \lim_{n \to \infty} |N_{2n}|^{1/2n}.$$

Prueba. Se deduce casi inmediatamente de (4.8) y del lema 4.1.1.

Afirmación (iv). *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$|N_n| \leq \alpha_N^{n+2}. \tag{4.9}$$

Prueba. Por contradicción, supongamos que existan $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|N_n| \geq (\alpha_N^2 + \varepsilon)\alpha_N^n.$$

En tal caso para $n_k = 2^k n + (2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2)$ tenemos, gracias a (4.8),

$$\begin{array}{rcl} |N_{n_1}| & = & |N_{2n+2}| \geq (\alpha_N^2 + \varepsilon)\alpha_N^n, \\ & \vdots & \\ |N_{n_k}| & = & |N_{2n_{k-1}+2}| \geq (\alpha_N^2 + \varepsilon)^{2^k} (\alpha_N)^{2^k n}, \end{array}$$

y por lo tanto

$$|N_{n_k}|^{1/n_k} \geq \left[(\alpha_N^2 + \varepsilon)^{2^k} (\alpha_N)^{2^k n} \right]^{1/[2^k n + (2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2)]}.$$

Observe que, cuando k tiende al infinito,

$$\frac{2^k}{2^k n + (2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2)} = \frac{2^k}{2^k n + 2^{k+1} - 2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{n+2},$$

por lo que

$$\limsup_{n \to \infty} |N_{n_k}|^{1/n_k} \geq (\alpha_N^2 + \varepsilon)^{1/(n+2)} (\alpha_N)^{n/(n+2)} > \alpha_N,$$

lo cual contradice la definición de α_N.

Ejercicio 4.4.2. Pruebe que si $N^{(1)} \subset N^{(2)} \subset \ldots$ es una sucesión creciente de subgrupos normales de L_k y $N = \cup_{n \geq 1} N^{(n)}$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_{N^{(n)}} = \sup\{\alpha_{N^{(n)}}, n \in \mathbb{N}\} = \alpha_N.$$

Dé un ejemplo mostrando que un enunciado análogo no es válido para sucesiones decrecientes de subgrupos normales.

Designemos por $p_{i,j}^n$ la probabilidad de ir en n pasos desde un elemento a distancia i de e hasta un elemento a distacia j de e (respecto a la caminata aleatoria simple en L_k). Por ejemplo, si $i \neq 0$ entonces

$$p_{i,i+1}^1 = \frac{2k-1}{2k} = \rho \qquad \text{y} \qquad p_{i,i-1}^1 = \frac{1}{2k} = \varrho.$$

Los distintos valores $p_{i,j}^n$ satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia:

(i) $p_{i,j}^n = \rho p_{i,j-1}^{n-1} + \varrho p_{i,j+1}^{n-1}$ para $j > 1$,

(ii) $p_{i,1}^n = p_{i,0}^{n-1} + \varrho p_{i,2}^{n-1}$,

(iii) $p_{i,0}^n = \varrho p_{i,1}^{n-1}$.

A partir de estas igualdades pueden obtenerse expresiones explícitas para los valores de $p_{i,j}^n$. Dejamos al lector la tarea de verificar por inducción en n que si $j \geq 1$ entonces

$$p_{i,j}^n = (\sqrt{\rho\varrho})^n \Big(\sqrt{\frac{\varrho}{\rho}}\Big)^{i-j} \left[\binom{n}{\frac{n+i-j}{2}} + \frac{\varrho}{\rho}\binom{n}{\frac{n+i+j}{2}} - \frac{\rho-\varrho}{\rho\varrho} \sum_{t=1}^{\frac{1}{2}(n-i+j)} \Big(\frac{\varrho}{\rho}\Big)^t \binom{n}{\frac{n+i+j+2t}{2}} \right], \tag{4.10}$$

mientras que

$$p_{i,0}^n = (\sqrt{\rho\varrho})^n \Big(\sqrt{\frac{\varrho}{\rho}}\Big)^{i} \left[\binom{n}{\frac{n+i}{2}} - \frac{\rho-\varrho}{\rho\varrho} \sum_{t=1}^{\frac{1}{2}(n-i)} \Big(\frac{\varrho}{\rho}\Big)^t \binom{n}{\frac{n+i+2t}{2}} \right]. \tag{4.11}$$

Remarquemos que en las igualdades anteriores, una expresión del tipo $\binom{n}{m/2}$ debe ser considerada nula cuando m es impar.

Lema 4.4.3. *Si $a \geq 1$ entonces para $b(n,j) = a^j\binom{n}{\frac{n+j}{2}}$ se tiene*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \left[\max_{0 \leq j \leq n} b(n,j) \right]^{1/n} = a + \frac{1}{a}.$$

Demostración. Puesto que

$$\frac{b(n,j+2)}{b(n,j)} = a^2\Big(\frac{n-j}{n+j+2}\Big),$$

se tiene

$$b(n,j+2) \geq b(n,j) \quad \text{si} \quad j \leq n\Big(\frac{a^2-1}{a^2+1}\Big) - 1,$$

$$b(n,j+2) \leq b(n,j) \quad \text{si} \quad j \geq n\Big(\frac{a^2-1}{a^2+1}\Big) + 1,$$

Sean $\beta = \frac{a^2-1}{a^2+1}$, $\gamma = [\beta n]$. De lo anterior se concluye que

$$\max_{0\leq j\leq n} b(n,j) = \max_{\gamma-1 \leq j \leq \gamma+1} b(n,j).$$

A partir de esto, y usando la aproximación de Stirling, se comprueba fácilmente que

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n\to\infty} \left[\max_{0 \leq j \leq n} b(n,j) \right]^{1/n} &= \overline{\lim}_{n\to\infty} \left[a^{\beta n} \binom{n}{[\frac{(1+\beta)n}{2}]} \right]^{1/n} \\ &= \overline{\lim}_{n\to\infty} \left[a^{\beta n} \Big(\frac{2}{1+\beta}\Big)^{\frac{(1+\beta)n}{2}} \Big(\frac{2}{1-\beta}\Big)^{\frac{(1-\beta)n}{2}} \right]^{1/n} \\ &= a + \frac{1}{a}. \ \square \end{aligned}$$

Proposición 4.4.4. *Si μ es es la proyección sobre $\Gamma = L_k/N$ de la medida simétrica y equidistribuida sobre los generadores de L_k, entonces se tiene la igualdad*

$$\lambda(\Gamma,\mu) = \overline{\lim}_{n\to\infty}\left[\max_{0\le j\le n}\left(\frac{\alpha_N}{2k-1}\right)^j p^n_{0,j}\right]^{1/n}.$$

Demostración. Tenemos la igualdad

$$p^{(n)}(e\to e) = p^n_{0,0} + \sum_{j=1}^{n} p^n_{0,j}\frac{|N_j|}{2k(2k-1)^{j-1}}.$$

Si definimos

$$\lambda_n = \max\left\{p^n_{0,0}, \max_{1\le j\le n} p^n_{0,j}\frac{|N_j|}{2k(2k-1)^{j-1}}\right\},$$

entonces

$$\lambda(\Gamma,\mu) = \overline{\lim}_{n\to\infty}\left[p^{(n)}(e\to e)\right]^{1/n} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\lambda_n^{1/n}\left[\frac{p^n_{0,0}}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{j\ge 1}^{n} p^n_{0,j}\frac{|N_j|}{2k(2k-1)^{j-1}}\right]^{1/n}.$$

Observe que la expresión entre corchetes está acotada entre 1 y $n+1$, por lo que

$$\lambda(\Gamma,\mu) = \overline{\lim}_{n\to\infty}\lambda_n^{1/n}. \tag{4.12}$$

Por otra parte, si $|N_j| \neq 0$ entonces la desigualdad (4.9) implica que $c_j\alpha_N^j \le |N_j| \le \alpha_N^2\alpha_N^j$, mientras que

$$(2k-1)^j \le 2k(2k-1)^{j-1} \le 2(2k-1)^j.$$

De ello se concluye que

$$\lambda_n^{1/n} = C_n^{1/n}\max_{0\le j\le n}\left[p^n_{0,j}\frac{\alpha_N^j}{(2k-1)^j}\right]^{1/n},$$

donde C_n es un real positivo perteneciente a cierto intervalo compacto independiente de n. Tomando el límite superior y utilizando (4.12) obtenemos la igualdad deseada. □

Teorema 4.4.5. *Con las notaciones anteriores,*

$$\lambda(\Gamma,\mu) = \frac{\sqrt{2k-1}}{2k}\left(\frac{\alpha_N}{\sqrt{2k-1}} + \frac{\sqrt{2k-1}}{\alpha_N}\right). \tag{4.13}$$

Demostración. Para $j>0$ la igualdad (4.10) implica que

$$p^n_{0,j} = (\sqrt{\rho\varrho})^n\Big(\sqrt{\frac{\rho}{\varrho}}\Big)^j\left[\binom{n}{\frac{n-j}{2}} + \frac{\varrho}{\rho}\binom{n}{\frac{n+j}{2}} - \frac{\rho-\varrho}{\rho\varrho}\sum_{t=1}^{\frac{n+j}{2}}\Big(\frac{\varrho}{\rho}\Big)^t\binom{n}{\frac{n+j+2t}{2}}\right].$$

Luego,

$$p^n_{0,j} \le (\sqrt{\rho\varrho})^n\Big(\frac{\rho}{\varrho}\Big)^j\Big(1+\frac{\varrho}{\rho}\Big)\binom{n}{\frac{n+j}{2}} = (\sqrt{\rho\varrho})^n\Big(\frac{\rho}{\varrho}\Big)^j\frac{1}{\rho}\binom{n}{\frac{n+j}{2}}. \tag{4.14}$$

Por otra parte, $\binom{n}{\frac{n+j+2t}{2}} \le \binom{n}{\frac{n+j}{2}+1}$. Siendo $\varrho<\rho$ obtenemos

$$\sum_{t=1}^{\frac{n-j}{2}}\Big(\frac{\varrho}{\rho}\Big)^t\binom{n}{\frac{n+j+2t}{2}} \le \binom{n}{\frac{n+j}{2}+1}\sum_{t=1}^{\frac{n-j}{2}}\Big(\frac{\varrho}{\rho}\Big)^t \le \frac{\varrho}{\rho}\binom{n}{\frac{n+j}{2}}\frac{1}{1-\frac{\varrho}{\rho}}\cdot\frac{n-j}{n+j+2},$$

por lo que

$$p^n_{0,j} \geq (\sqrt{\rho\varrho})^n \Big(\sqrt{\frac{\rho}{\varrho}}\Big)^j \binom{n}{\frac{n+j}{2}} \frac{1}{\rho}\left[1 - \frac{n-j}{n+j+2}\right] \geq (\sqrt{\rho\varrho})^n \Big(\sqrt{\frac{\rho}{\varrho}}\Big)^j \binom{n}{\frac{n+j}{2}} \frac{2(j+1)}{p(n+j+2)},$$

lo cual implica

$$p^n_{0,j} \geq (\sqrt{\rho\varrho})^n \Big(\sqrt{\frac{\rho}{\varrho}}\Big)^j \binom{n}{\frac{n+j}{2}} \frac{2}{p(n+j+2)}. \tag{4.15}$$

Para $j = 0$ tenemos (vea la igualdad (4.11))

$$p^n_{0,0} = (\sqrt{\rho\varrho})^n \left[\binom{n}{n/2} - \frac{\rho - \varrho}{\rho\varrho} \sum_{t=1}^{n/2} \Big(\frac{q}{p}\Big)^t \binom{n}{\frac{n+2t}{2}}\right],$$

obteniéndose esta vez

$$(\sqrt{\rho\varrho})^n \binom{n}{n/2} \geq p^n_{0,0} \geq \frac{4}{n+2} (\sqrt{\rho\varrho})^n \binom{n}{n/2}. \tag{4.16}$$

Haciendo

$$a = \Big(\sqrt{\frac{\rho}{\varrho}}\Big) \frac{\alpha_N}{2k-1} = \frac{\alpha_N}{\sqrt{2k-1}} \geq 1,$$

y debido a (4.14), (4.15) y (4.16), la proposición precedente implica que

$$\lambda(\Gamma, \mu) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \left[\max_{0\leq j\leq n} (\sqrt{\rho\varrho})^n \Big(\sqrt{\frac{\rho}{\varrho}}\Big)^j \binom{n}{\frac{n+j}{2}} \Big(\frac{\alpha_N}{2k-1}\Big)^j\right]^{1/n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \left[\max_{0\leq j\leq n} (\sqrt{\rho\varrho})^n b(n,j)\right]^{1/n}.$$

Finalmente, el lema 4.4.3 nos da

$$\lambda(\Gamma, \mu) = \sqrt{\rho\varrho}\Big(a + \frac{1}{a}\Big) = \frac{\sqrt{2k-1}}{2k}\left(\frac{\alpha_N}{\sqrt{2k-1}} + \frac{\sqrt{2k-1}}{\alpha_N}\right). \qquad \square$$

Corolario 4.4.6. *El grupo $\Gamma = L_k/N$ es promediable si y sólo si el cocrecimiento de N es maximal, es decir si y sólo si $\alpha_N = 2k-1$.*

En efecto, Γ es promediable si y sólo si $\lambda(\Gamma, \mu) = 1$, y utilizando la igualdad (4.13) se verifica fácilmente que esto se cumple sólo para $\alpha_N = 1$ ó $\alpha_N = 2k-1$. El primero de estos casos debe sin embargo ser excluido, pues sabemos a priori que $\alpha_N \geq \sqrt{2k-1}$.

Observación 4.4.7. Si N es (normal en L_k y) no trivial entonces $\alpha_N > \sqrt{2k-1}$. En efecto, en caso contrario la igualdad (4.4.5) nos da

$$\lambda(\Gamma, \mu) = \sqrt{\frac{2k-1}{k^2}}.$$

Afirmamos sin embargo que esto es imposible. En efecto, si $g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots g_{i_p}^{\varepsilon_p}$ es un elemento no trivial de N escrito en forma reducida, entonces es fácil verificar que existen i, j en $\{1, \ldots, k\}$ y $\varepsilon, \varepsilon'$ en $\{-1, 1\}$ tales que $g_i^{\varepsilon} \neq g_{i_1}^{-\varepsilon_1}$, $g_i^{\varepsilon'} \neq g_{i_1}^{-\varepsilon_1}$, $g_j^{-\varepsilon} \neq g_{i_p}^{-\varepsilon_p}$, $g_j^{-\varepsilon'} \neq g_{i_p}^{-\varepsilon_p}$ y $g_i^{\varepsilon} \neq g_j^{-\varepsilon'}$. Estas relaciones implican que $h_1 = g_i^{\varepsilon} g g_i^{-\varepsilon}$ y $h_2 = g_i^{\varepsilon'} g g_i^{-\varepsilon'}$ generan un grupo libre, el cual está evidentemente contenido en N. Gracias a la proposición 4.1.7 obtenemos

$$\sqrt{\frac{2k-1}{k^2}} = \lambda(\Gamma, \mu) = \lambda(L_k/N, \mu) > \lambda(L_k, \mu) = \sqrt{\frac{2k-1}{k^2}},$$

lo cual es absurdo.

Finalizamos esta sección con un interesante criterio de recurrencia relacionado con lo anterior: la caminata simple es recurrente en un grupo $\Gamma = L_k/N$ si y sólo si se verifica

$$\sum_{n\geq 0} \frac{|N_n|}{(2k-1)^n} = \infty.$$

Para probar esto verificaremos la igualdad

$$\sum_{n\geq 0} p^{(n)}(e \to e) = \frac{1}{\rho} + \frac{2k-1}{2(k-1)} \sum_{j\geq 1} \frac{|N_j|}{(2k-1)^j}, \tag{4.17}$$

de la cual se desprende inmediatamente lo afirmado.

Comencemos observando que

$$p^{(n)}(e \to e) = p^n_{0,0} + \sum_{j\geq 1} p^n_{0,j} \frac{|N_j|}{2k(2k-1)^{j-1}},$$

igualdad de la cual se concluye que

$$\sum_{n\geq 0} p^{(n)}(e \to e) = \sum_{n\geq 0} p^n_{0,0} + \frac{2k-1}{2k} \sum_{j\geq 1} \frac{|N_j|}{(2k-1)^j} \sum_{n\geq j} p^n_{0,j}. \tag{4.18}$$

Observe ahora que, por (4.11),

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} p^n_{0,0} &= \sum_{n\geq 0} (\sqrt{\rho\varrho})^n \left[\binom{n}{\frac{n}{2}} - \frac{\rho-\varrho}{\rho\varrho} \sum_{t=1}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\varrho}{\rho}\right)^t \binom{n}{\frac{n+2t}{2}} \right] \\
&= \sum_{n\geq 0} (\sqrt{\rho\varrho})^n \binom{n}{\frac{n}{2}} - \frac{\rho-\varrho}{\rho\varrho} \sum_{t\geq 1} \left(\frac{\varrho}{\rho}\right)^t \sum_{n\geq 2t} (\sqrt{\rho\varrho})^n \binom{n}{\frac{n+2t}{2}}.
\end{aligned}$$

Así, utilizando la identidad (1.8) obtenemos

$$\sum_{n\geq 0} p^n_{0,0} = \frac{1}{\rho-\varrho} - \frac{\rho-\varrho}{\rho\varrho} \sum_{t\geq 1} \left(\frac{\varrho}{\rho}\right)^t \frac{1}{\rho-\varrho} \left(\frac{\varrho}{\rho}\right)^t = \frac{1}{\rho-\varrho} - \frac{1}{\rho\varrho} \sum_{t\geq 1} \left(\frac{\varrho}{\rho}\right)^{2t} = \frac{1}{\rho}. \tag{4.19}$$

Por otra parte, $\sum_{j\geq 1} \frac{|N_j|}{(2k-1)^j} \sum_{n\geq j} p^n_{0,j}$ es igual a

$$\sum_{j\geq 1} \frac{|N_j|}{(2k-1)^j} (\sqrt{\rho\varrho})^n \left(\sqrt{\frac{\varrho}{\rho}}\right)^{-j} \left[\sum_{n\geq j} \binom{n}{\frac{n-j}{2}} + \frac{\varrho}{\rho} \sum_{n\geq j} \binom{n}{\frac{n+j}{2}} - \frac{\rho-\varrho}{\rho\varrho} \sum_{n\geq j} \sum_{t=1}^{\frac{1}{2}(n+j)} \left(\frac{\varrho}{\rho}\right)^t \binom{n}{\frac{n+j+2t}{2}} \right],$$

es decir a

$$\sum_{j\geq 1} \frac{|N_j|}{(2k-1)^j} \left(\sqrt{\frac{\rho}{\varrho}}\right)^j \left[\frac{1}{\rho} \sum_{n\geq j} (\sqrt{\rho\varrho})^n \binom{n}{\frac{n+j}{2}} - \frac{\rho-\varrho}{\rho\varrho} \sum_{t\geq 1} \left(\frac{\varrho}{\varrho}\right)^t \sum_{n\geq 2t+j} (\sqrt{\rho\varrho})^n \binom{n}{\frac{n+j+2t}{2}} \right] =$$

$$= \sum_{j\geq 1} \frac{|N_j|}{(2k-1)^j} \left(\sqrt{\frac{\rho}{\varrho}}\right)^j \left[\frac{1}{\rho(\rho-\varrho)} \left(\sqrt{\frac{\varrho}{\rho}}\right)^j - \frac{\rho-\varrho}{\rho\varrho} \sum_{t\geq 1} \left(\frac{\varrho}{\varrho}\right)^t \frac{1}{\rho-\varrho} \left(\sqrt{\frac{\varrho}{\rho}}\right)^{2t+j} \right].$$

Una vez más, la identidad (1.8) permite reducir la expresión anterior, obteniéndose así la igualdad

$$\sum_{j\geq 1} \frac{|N_j|}{(2k-1)^j} \sum_{n\geq j} p^n_{0,j} = \frac{1}{\rho-\varrho} \sum_{j\geq 1} \frac{|N_j|}{(2k-1)^j}. \tag{4.20}$$

De (4.18), (4.19) y (4.20) se concluye inmediatamente (4.17).

Ejercicio 4.4.8. Usando el criterio precedente, demuestre nuevamente la recurrencia y la transiencia para la caminata simple sobre $\mathbb{Z}^2$ y sobre $\mathbb{Z}^3$ respectivamente (sugerencia: use la técnica del ejemplo 1.2.4 y vea el ejercicio 1.2.5).

Capítulo 5

Teoremas ergódicos para acciones de grupos

Comencemos recordando el teorema ergódico de Birkhoff.

Teorema. *Sea $T : (X, \mu)$ una transformación ergódica de un espacio de probabilidad en sí mismo. Si $\varphi : X \to \mathbb{R}$ es una función de $\mathcal{L}^1(X, \mu)$, entonces para casi todo $x \in X$ se tiene la convergencia*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(T^n(x)) = \int_X \varphi d\mu.$$

En otras palabras, para toda transformación ergódica, la sucesión de medias temporales converge en casi todo punto a la media espacial. Señalemos que consideramos la noción clásica de ergodicidad: un subconjunto A de X es T-invariante si $T^{-1}(A) = A$, y T es ergódica si todo subconjunto boreleano e invariante es de medida nula o total.

Consideremos ahora un grupo Γ que actúa sobre un espacio de probabilidad X y que preserva la medida de probabilidad μ. En tal caso, se dice que un subconjunto A de X es Γ-invariante si $g(A) = A$ para todo $g \in \Gamma$, y la acción es ergódica si todo subconjunto boreleano e invariante es de medida nula o total.

Una manera interesante de caracterizar la ergodicidad es dada por la siguiente proposición.

Proposición 5.0.9. *La acción de Γ es ergódica si y sólo si toda función de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ invariante por Γ es constante.*

Demostración. □

Fijemos $p \in [1, \infty]$. Un *promedio* sobre $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ es un funcional lineal $m : \mathcal{L}^p(X, \mu) \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes condiciones:

(a) si $\varphi \geq 0$ entonces $m(\varphi) \geq 0$;

(b) $m(1) = 1$;

El espacio de los promedios es convexo y dotado de la topología débil estrella es compacto. Si Γ actúa mediblemente sobre X entonces decimos que un promedio m es Γ-invariante si $m(g\varphi) = m(\varphi)$ para todo $g \in \Gamma$ y toda $\varphi \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Por ejemplo, si Γ actúa preservando μ entonces para todo $p \in [1, \infty]$ tenemos la Γ-invariancia del funcional que consiste a "integrar respecto a μ" y que es dado por

$$\varphi \longmapsto \int_X \varphi(x) d\mu(x).$$

Proposición 5.0.10. *La acción de Γ es ergódica si y sólo si para algún (equivalentemente, para todo) $p \in [1, \infty[$, la única media invariante sobre $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ es la integración respecto a μ.*

Demostración. Si $p \in [1, \infty[$ entonces, por el teorema de Radon-Nykodim, el funcional m está determinado por una única función $\psi_m \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$, donde $1/p + 1/q = 1$, de manera que $m(\varphi) = \int_X \varphi \psi_m d\mu$. Además, m es Γ-invariante si y solamente la función ψ_m lo es. Si la acción es ergódica entonces, por la proposición 5.0.9, la función ψ_m es constante, y por la propiedad (b) dicha constante es igual a 1. El funcional m es por lo tanto la integración respeto a μ. La demostración de la afirmación recíproca es análoga. $\square$

Capítulo 6

Caminatas equivariantes y orificio espectral

6.1 Una propiedad cohomológica

Los valores $\mu(g \to h)$ pueden ser vistos como las entradas de una "matriz infinita" actuando en $\mathbb{R}^\Gamma$. De manera más formal, consideramos el operador lineal $M = M(\Gamma, \mu) : \ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Gamma)$ dado por

$$M\left((x_g)_{g\in\Gamma}\right) = \left(\sum_{h\in\Gamma} \mu(g \to h) x_h\right)_{g\in\Gamma}.$$

Observe en particular que, para $n \in \mathbb{N}$, el operador $M^n = (M(\Gamma,\mu))^n$ coincide con $M(\Gamma, \mu^{*(n)})$, donde $\mu^{*(n)}$ es la n-ésima convolución de μ consigo misma.

6.2 Ergodicidad fuerte y teoremas ergódicos optimales

En lo que sigue suponemos que Γ actúa sobre (X, μ) preservando la medida de probabilidad.

Definición 6.2.1. La acción de Γ es *fuertemente ergódica* si la única media invariante sobre $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ es la integración respecto a μ.

Para cada subconjunto medible C de X definimos el funcional m_C sobre $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ por

$$m_C(\varphi) = \frac{1}{\mu(C)} \int_C \varphi(x) d\mu(x).$$

Es fácil verificar que cada m_C es un promedio.

Supongamos ahora que existe una sucesión de subconjuntos medibles $C_n \subset X$ tales que $\mu(C_n) \to 0$ y $\mu(C_n \Delta g(C_n))/\mu(C_n) \to 0$ para todo $g \in \Gamma$. Pasando a una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $(m_n) = (m_{C_n})$ converge en la topología débil estrella a un promedio m y que $\mu(C_n) < 1/2^n$ para toto $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos en tal caso que m es Γ-invariante y diferente de la integración respecto a μ. Para demostrar la invariancia, denotemos por h_n a la función $\mathcal{X}_{C_n}/\mu(C_n)$. Para todo $g \in \Gamma$ se tiene

$$\|h_n \circ g - h_n\|_1 = \frac{\mu(C_n \Delta g(C_n))}{\mu(C_n)} \to 0.$$

Lo anterior implica que para toda función $\varphi \in \mathcal{L}^{\infty}(X,\mu)$ y para todo $g \in \Gamma$,

$$|m(g\varphi) - m(\varphi)| = \lim_{n\to\infty} |\int_X (h_n \circ g - h_n)\varphi d\mu| \leq \|\varphi\|_\infty \lim_{n\to\infty} \|h_n \circ g - h_n\|_1 = 0.$$

Para verificar que m no es la integración respecto a μ notemos simplemente que si $C = \cup C_n$ entonces $\mu(C) < \sum_{n\geq 1} 1/2^n = 1$. Luego, para $\varphi = \mathcal{X}_C$ se tiene $\int_X \varphi d\mu = \mu(C) < 1$. Por otro lado, $m_n(\varphi) = 1$ para todo n, por lo que $m(\varphi) = 1$.

Dada una medida de probabilidad υ esta vez definida sobre Γ definimos el operador $\pi(\upsilon)$ sobre $\mathcal{L}^2(X,\mu)$ por $< \pi(\upsilon)\varphi_1, \varphi_2 >= \int_\Gamma < g(\varphi_1), \varphi_2 > d\upsilon(g)$.

Proposición 6.2.2. *Si la acción de Γ es estrictamente ergódica entonces la norma del operador $\pi(\upsilon)$ es inferior a 1.*

Demostración. Si Γ posee la propiedad (T) de Kazhdan entonces toda acción ergódica de Γ es estrictamente ergódica.

6.3 Consecuencias de la desigualdad $\|\pi(\upsilon)\| < 1$

Veremos a continuación que bajo la hipótesis $\|\pi(\upsilon)\| < 1$ puede darse una versión cuantitativa muy interesante del teorema ergódico de Kakutani. El siguiente resultado es debido a Furman y Shalom.

Teorema 6.3.1. *Supongamos que el soporte de υ engendra Γ y que $\|\pi(\upsilon)\| < 1$. entonces para toda $\varphi \in \mathcal{L}^1_0(X,\mu)$ y toda sucesión (a_n) tal que $\sum a_n^2 < \infty$ se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \int_X \|\sum_{i=1}^n g_i^\omega(\varphi)\| = 0.$$

En particular, para toda $\varphi \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ se tiene

$$\frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^n g_i^\omega(\varphi) - \int_X \varphi d\mu\| = o\left(\frac{\log^{1+\varepsilon}(n)}{\sqrt{n}}\right).$$

Notemos para comenzar que la segunda parte del teorema se deduce de la primera al considerar $\varphi - \int_X \varphi \in \mathcal{L}^1_0(X,\mu)$ y $a_n = 1/\sqrt{n\log^{1+2\varepsilon}(n)}$. Señalemos también que bajo las mismas hipótesis puede darse una versión puntual del teorema ergódico.

Capítulo 7

Borde de Poisson-Furstenberg

7.1 Definiciones y ejemplos

Un Γ-espacio es un espacio topológico Ω provisto de una acción de Γ por homeomorfismos, de modo que existe un homomorfismo de Γ en Homeo(Ω). Si μ es una probabilidad sobre Γ y v una probabilidad sobre (los boreleanos de) Ω, y si las distriduciones correspondientes son independientes, entonces la distribución asociada a una variable aleatoria $g(\xi)$ es dada por la convolución $\mu * v$ entre μ y v definida por

$$\int_\Omega \varphi(\xi) d(\mu * v)(\xi) = \int_\Gamma \int_\Omega \varphi(g\xi) dv(\xi) d\mu(g)$$

para toda función continua y acotada $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. Observe que para cada $g \in \Gamma$ la medida $\delta_g * v$ coincide con la imagen $g(v)$ de v por g. La definición precedente de convolución de medidas generaliza aquélla dada en la sección 1.1: el grupo Γ puede ser visto como un Γ-espacio (el homeomorfismo del espacio topológico discreto Γ inducido por cada g es dado por la traslación a izquierda $h \mapsto gh$).

Es natural intentar considerar el espacio $\Gamma \cup \Omega$ como un nuevo Γ-espacio, lo que hace necesario fijar una topología en él. Supongamos que Ω viene provisto de una medida de probabilidad v. Una topología natural en $\Gamma \cup \Omega$ es la más pequeña para la cual las inclusiones respectivas de Γ y Ω son incrustaciones y para la cual se tiene además la continuidad de la aplicación de $\Gamma \cup \Omega$ en $Prob(\Gamma \cup \Omega)$ dada por

$$g \mapsto g(v) \qquad \text{y} \qquad \xi \mapsto \delta_\xi.$$

Dicha topología será llamada *canónica*.

Una medida v en Ω es dicha *estacionaria* si se verifica la igualdad $\mu * v = v$. Una aplicación T entre dos Γ-espacios Ω_1 y Ω_2 es *equivariante* si para todo $g \in \Gamma$ y todo $\xi \in \Omega_1$ se verifica

$$T(g\xi) = g\big(T(\xi)\big).$$

Si μ y v son medidas de probabilidad sobre Γ y Ω_1 respectivamente, entonces $T(\mu * v) = \mu * T(v)$ para toda aplicación equivariante $T : \Omega_1 \to \Omega_2$. En particular, si v es estacionaria, entonces $T(v)$ también lo es.

Definición 7.1.1. Dado un Γ-espacio Ω, un *μ-proceso* es un par de sucesiones (ξ_n) y (h_n) de variables aleatorias a valores en Ω y Γ respectivamente satisfaciendo:

(i) ξ_k es una función de $h_k, h_{k+1}, \ldots$,

(ii) todas las variables ξ_k poseen la misma distribución,

(iii) h_k es independiente de $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots$,

(iv) $h_k(\xi_k) = \xi_{k+1}$.

Denotamos por v la distribución de la variable ξ_1. Observe que las propiedades (ii) y (iv) implican que v es una medida μ-estacionaria.

Definición 7.1.2. Un *borde* de (Γ, μ) es un Γ-espacio Ω dotado de una medida de probabilidad μ-estacionaria v asociada a un μ-proceso en Ω.

Intuitivamente, queremos pensar en la variable ξ_k como siendo igual al "producto infinito" $h_k h_{k+1} \cdots$. La proposición siguiente muestra las definiciones anteriores se adecúan a esta intuición.

Proposición 7.1.3. *Si Ω es un borde de (Γ, μ), entonces para casi todo camino aleatorio $(h_1, h_2, \ldots) \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ el producto $h_1 \cdots h_n$ converge hacia un punto de Ω respecto a la topología canónica en $\Gamma \cup \Omega$.*

Demostración. De acuerdo a la definición de la topología canónica en $\Gamma \cup \Omega$, lo natural es intentar verificar que para casi todo camino se tiene

$$h_1 h_2 \cdots h_n(v) \longrightarrow \delta_{\xi_1}.$$

Para ello debemos verificar que para toda función continua y acotada $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \varphi(\xi) d(h_1 \cdots h_n(v))(\xi) = \varphi(\xi_1),$$

es decir

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \varphi\big(h_1 \cdots h_n(\xi)\big) dv(\xi) = \varphi(\xi_1).$$

Ahora bien, como $\xi_1 = h_1 \cdots h_n(\xi_{n+1})$ y ξ_{n+1} es independiente de $h_1, \ldots, h_n$, se tiene que

$$\mathbb{E}\big(\varphi(\xi_1) | h_1, \ldots, h_n\big) = \mathbb{E}\big(\varphi(h_1 \cdots h_n(\xi_{n+1}))\big| h_1, \ldots, h_n\big) = \int_\Omega \varphi\big(h_1 \cdots h_n(\xi)\big) dv(\xi).$$

Finalmente, como ξ_1 es una función de $h_1, h_2, \ldots$, el valor de $\mathbb{E}(\varphi(\xi_1) | h_1, h_2, \ldots, h_n)$ converge a $\varphi(\xi_1)$ (como consecuencia del teorema de convergencia para martingales). $\square$

Ejercicio 7.1.4. Recíprocamente a la proposición precedente, pruebe que si Ω es un Γ-espacio provisto de una medida estacionaria v, y si con probabilidad 1 la sucesión de medidas $h_1 \cdots h_n(v)$ converge a una delta de Dirac (con masa en algún punto de Ω), entonces existe un μ-proceso en Ω con distribución v (sugerencia: defina ξ_1 por $\lim_{n \to \infty} h_1 \cdots h_n(v) = \delta_{\xi_1}$).

Un borde (Ω', v') de (Γ, μ) es la imagen equivariante de otro borde (Ω, v) si existe una aplicación equivariante $T : \Omega \to \Omega'$ tal que $T(v) = v'$.

Definición 7.1.5. El borde de Poisson-Furstenberg $P(\Gamma, \mu)$ de un grupo provisto de una medida de probabilidad μ es un (Γ, μ) borde maximal de (Γ, μ), en el sentido de que cualquier borde de (Γ, μ) es la imagen equivariante de $P(\Gamma, \mu)$.

La existencia y unicidad (funtorial) del borde Poisson son resultados técnicamente difíciles de establecer. Para ellos recomendamos la lectura de [13] y [3].

Antes de cerrar nuestra introducción a la teoría de borde de Poisson debemos discutir su relación con las funciones armónicas. El punto de partida viene dado por la siguiente observación: si (Ω, v) es un borde de (Γ, μ), entonces para toda función medible y acotada $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$, la función $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(g) = \int_\Omega \psi(g\xi)\, dv(\xi)$$

es μ-armónica. En efecto, se tiene la igualdad

$$\begin{aligned} \varphi(g) &= \int_\Omega \psi(g\xi)\, d(\mu * v)(\xi) \\ &= \int_\Omega \int_\Gamma \psi(gh\xi)\, d\mu(h)\, dv(\xi) \\ &= \int_\Gamma \Big(\int_\Omega \psi(gh\xi)\, dv(\xi) \Big)\, d\mu(h) \\ &= \int_\Gamma \varphi(gh)\, d\mu(h). \end{aligned}$$

La observación anterior admite una recíproca: si $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ es una función μ-armónica y acotada, entonces existe una función medible y acotada $\hat{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para todo $g \in \Gamma$ se tiene

$$\varphi(g) = \int_\Omega \hat{\varphi}(g\xi)\, dv(\xi).$$

Además, la función $\hat{\varphi}$ está únicamente determinada módulo conjuntos de medida nula.

Veremos a continuación una aplicación muy interesante de la caracterización del borde de Poisson en términos de funciones armónicas.

Definición 7.1.6. Sea μ una medida de probabilidad sobre un grupo Γ. Un subconjunto A de Γ es *recurrente* (respecto a μ) si la probabilidad de pasar infinitas veces por puntos de A es igual a 1 respecto a la caminata inducida por μ (partiendo desde cualquier punto de Γ). En el caso en que A sea un subgrupo nos referiremos a él como a un *subgrupo recurrente.*

Esta definición generaliza la noción de recurrencia considerada en el capítulo 1: un grupo Γ es recurrente respecto a una probabilidad μ si el elemento neutro es un subconjunto (o subgrupo) recurrente de Γ.

Si H es un subgrupo de índice finito de Γ, entonces es fácil ver que H es necesariamente recurrente. Un ejemplo más interesante de subgrupo recurrente es el grupo de los conmutadores L_2' de L_2: si μ es la medida estándar sobre L_2 entonces L_2' es μ-recurrente en L_2: la caminata inducida en el cuociente L_2/L_2' no es otra cosa que la caminata estándar sobre $\mathbb{Z}^2$. Es bien sabido que L_2' es isomorfo a L_∞ (el grupo libre con infinitos generadores; vea [24]). La proposición siguiente muestra en particular que existe una medida de probabilidad μ' sobre L_∞ para la cual el borde de Poisson asociado $P(L_\infty, \mu')$ es isomorfo a $P(L_2, \mu)$.

Proposición 7.1.7. *Si H es un subgrupo recurrente de un grupo Γ (respecto a una probabilidad μ), entonces existe una probabilidad μ' sobre H tal que los bordes de Poisson $P(H, \mu')$ y $P(\Gamma, \mu)$ son isomorfos.*

Antes de pasar a la prueba de la proposición, demos la idea heurística de ella. En el espacio de trayectorias consideramos aquéllas que, saliendo desde el elemento neutro, pasan infinitas veces por H. Como H es un subgrupo recurrente, hemos descartado sólo un conjunto de medida nula de caminos. Cada trayectoria restante puede ser vista como una secuencia de elementos de Γ conteniendo infinitos elementos de H. Resulta natural entonces definir $\mu'(g)$ como siendo la probabilidad (condicional) de que, al caer por primera en un elemento de H, dicho elemento sea igual a $g \in H$.

La verificación directa de la equivalencia entre $P(H, \mu')$ y $P(\Gamma, \mu)$ utiliza una versión general de la llamada "propiedad de Markov fuerte" para caminatas aleatorias. La descripción del borde de Poisson en términos de funciones armónicas acotadas permite soslayar esta dificultad.

Sea $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ una función acotada y armónica (respecto a μ). Si g pertence al subgrupo recurrente H entonces

$$\varphi(g) = \sum_{h \in \Gamma} \varphi(gh)\, \mu(h) = \sum_{h \in H} \varphi(gh)\, \mu(h) + \sum_{h \notin H} \varphi(gh)\, \mu(h).$$

Aplicando nuevamente la armonicidad de φ obtenemos

$$\varphi(g) = \sum_{h \in H} \varphi(gh) \big(\mu(h) + \mu_2(h)\big) + \sum_{h \notin H} \sum_{h' \in \Gamma} \varphi(ghh')\, \mu(h)\, \mu(h'),$$

donde

$$\mu_2(h) = \sum_{h_1 h_1' = h} \sum_{h_1 \notin H} \mu(h_1)\, \mu(h_1') \leq \mu^{*(2)}(h).$$

Prosiguiendo con esta reducción, y teniendo en cuenta que H es un subgrupo recurrente de Γ, en el límite obtenemos una igualdad de la forma

$$\varphi(g) = \sum_{h \in H} \varphi(gh) \big(\mu(h) + \mu_2(h) + \mu_3(h) + \ldots\big).$$

Debiese ser claro para el lector el hecho que la expresión entre paréntesis $\mu(h) + \mu_2(h) + \dots$ no es otra cosa que la probabilidad condicional $\mu'(h)$. De esta forma, la restricción de φ a H es una función (acotada y) armónica (respecto a μ').

Recíprocamente, ???

Ejercicio 7.1.8. Utilizando la descripción del borde de Poisson en témrinos de funciones armónicas acotadas, pruebe que el borde de Poisson asociado a una caminata perezosa coincide con el borde correspondiente a la caminata original.

7.2 Trivialidad del borde de Poisson y promediabilidad

El primer objetivo de esta sección es dar la demostración del siguiente teorema debido a Furstenberg.

Teorema 7.2.1. *Si un grupo admite una medida de probabilidad para la cual el borde de Poisson asociado no es trivial, entonces dicho grupo no es promediable.*

Comenzamos con el siguiente lema.

Lema 7.2.2. *Dada una medida de probabilidad μ sobre un grupo Γ, el borde de Poisson asociado es no trivial si y sólo si para todo $g \in sop(\mu)$ y casi toda trayectoria ω se cumple*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu^{*(n-1)}(g^{-1}\omega_n)}{\mu^{*(n)}(\omega_n)} = 1. \tag{7.1}$$

Demostración. Para todo $g \in \Gamma$ se tiene evidentemente

$$\mathbb{P}(C_g^1 | \eta_\omega^n) = \mu(g) \frac{\mu^{*(n-1)}(g^{-1}\omega_n)}{\mu^{*(n)}(\omega_n)}.$$

Cuando n tiende al infinito, $\mathbb{P}(C_g^1|\eta_\omega^n)$ converge a $\mathbb{P}(C_g^1|\eta)$. Si $P(\Gamma, \mu)$ es trivial entonces η es la partición trivial, por lo que $\mathbb{P}(C_g^1|\eta) = \mathbb{P}(C_g^1) = \mu(g)$. Concluimos que, en el caso de trivialidad de $P(\Gamma, \mu)$, se cumple

$$\lim_{n \to \infty} \mu(g) \frac{\mu^{*(n-1)}(g^{-1}\omega_n)}{\mu^{*(n)}(\omega_n)} = \mu(g),$$

lo cual implica (7.1) cuando $\mu(g) > 0$.

Recíprocamente, si la igualdad (7.1) es satisfecha entonces se verifica fácilmente por inducción que para casi toda trayectoria ω, todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $g \in sop(\mu^{*(k)})$ se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu^{*(n-k)}(g^{-1}\omega_n)}{\mu^{*(n)}(\omega_n)} = 1.$$

Esto quiere decir que todos los cilindros finitos C^k son independientes de la σ-álgebra de las colas η. La ley 0-1 de Kolmogorov permite concluir entonces que $P(\Gamma, \mu)$ es trivial. □

Recuerde que un grupo es promediable si y sólo si admite una media invariante finitamente aditiva. Debido a esto, el teorema 7.2.1 es una consecuencia directa de la proposición siguiente.

Proposición 7.2.3. *El borde de Poisson $P(\Gamma, \mu)$ es trivial si y sólo si $\mu^{*(n)}$ converge débilmente (o fuertemente) a una media invariante finitamente aditiva sobre Γ.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mu(e) > 0$ (vea el ejercicio 7.1.8). Afirmamos en primer lugar que si $P(\Gamma, \mu)$ es trivial entonces $\mu^{*(n)}$ converge fertemente a una media invariante finitamente aditiva. En efecto, puesto que $e \in sop(\mu)$, por el teorema 7.2.1 tenemos, para todo $g \in sop(\mu)$ y casi toda sucesión aleatoria ω,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu^{*(n-1)}(g^{-1}\omega_n)}{\mu^{*(n)}(\omega_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu^{*(n-1)}(g^{-1}\omega_n)}{\mu^{*(n-1)}(\omega_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu^{*(n)}(g^{-1}\omega_n)}{\mu^{*(n)}(\omega_n)} = 1.$$

Esto quiere decir que, para $g \in sop(\mu)$ y todo $\varepsilon > 0$, cuando n tiende al infinito se tiene la convergencia

$$\mu^{(n)}\left(\left\{h \in \Gamma : \left|1 - \frac{\mu^{*(n)}(g^{-1}h)}{\mu^{*(n)}(h)}\right| > \varepsilon\right\}\right) \longrightarrow 0.$$

Como $sop(\mu)$ genera Γ, lo anterior equivale a que $\mu^{*(n)}$ converge a una media invariante en Γ.

Probaremos ahora que si $\mu^{*(n)}$ converge débilmente a una media invariante finitamente aditiva, entonces toda función μ-armónica acotada φ es constante (lo cual implica la trivialidad de $P(\Gamma, \mu)$). Para ello observe que para todo $g \in \Gamma$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\varphi(g) - \varphi(e) = \sum_{h\in\Gamma} \mu^{*(n)}(g^{-1}h)\varphi(h) - \sum_{h\in\Gamma} \mu^{*(n)}(h)\varphi(h) = \sum_{h\in\Gamma} \big(\mu^{*(n)}(g^{-1}h) - \mu^{*(n)}(h)\big)\varphi(h). \tag{7.2}$$

Puesto que $\mu^{*(n)}(g^{-1}h) - \mu^{*(n)}(h)$ tiende a 0 para cada $h \in \Gamma$ y puesto que φ es acotada, se concluye directamente que el lado derecho de la igualdad (7.2) converge a 0 cuando n tiende al infinito. Concluimos así que $\varphi(g) = \varphi(e)$ para todo $g \in \Gamma$, es decir que φ es constante. □

La recíproca del teorema 7.2.1 no siempre es válida (vea los ejemplos 7.2.7 y 7.2.6 presentados más adelante). Sin embargo, ella lo es para ciertas clases de grupos promediables muy especiales.

Ejemplo 7.2.4. Si Γ es abeliano entonces todo borde de Poisson asociado a Γ es trivial, de acuerdo a un resultado debido a G. Choquet y J. Deny [5]. Para probar dicho teorema demostraremos que si Γ es un grupo abeliano y μ una medida de probabilidad cuyo soporte engendra a Γ, entonces toda función μ-armónica y acotada φ verifica $\varphi(gh) = \varphi(h)$ para todo $h \in \Gamma$: como tales elementos $g \in sop(\mu)$ generan Γ, esto implica que φ es constante.

Definamos la función $\psi : \Gamma \to \mathbb{R}$ por $\psi(h) = \varphi(h) - \varphi(gh)$. Afirmamos que ψ también es μ-armónica. En efecto,

$$\psi * \mu(h) = \varphi * \mu(h) - \sum_{f\in\Gamma} \varphi(ghf)\mu(f) = \varphi(h) - \varphi(gh) = \psi(h).$$

Denotemos $\alpha = \sup_{h\in\Gamma} \psi(h)$, y tomemos una sucesión (h_n) de elementos de Γ tal que $\psi(h_n)$ converja a α. Pasando a una subsucesión si es necesario, podemos suponer que la sucesión de funciones ψ_n definida por $\psi_n(h) = \psi(h_n h)$ converge uniformemente sobre los conjuntos finitos a una función ψ_∞ (usamos el hecho que φ es acotada). Observe que $\psi_\infty(h) \leq \alpha$ para todo $h \in \Gamma$. Además, el teorema de convergencia dominada nos permite afirmar que

$$\alpha = \psi_\infty(e) = \int_\Gamma \psi_\infty(f) d\mu(f) = \sum_{f\in\Gamma} \psi_\infty(f)\mu(f),$$

todo lo cual implica que ψ_∞ es constante e igual a α.

Fijemos ahora $p \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que $\psi_N(g^k) > \alpha - \varepsilon$ para todo $k \in \{0, \ldots, p-1\}$, es decir

$$\alpha - \varepsilon < \psi(h_N g^k) = \varphi(h_N g^k) - \varphi(g h_N g^k).$$

Como Γ es abeliano, lo anterior nos da

$$\varphi(h_N g^k) - \varphi(h_N g^{k+1}) > \alpha - \varepsilon,$$

lo que permite obtener mediante un argumento de suma telescópica

$$2 \sup_{h\in\Gamma} |\psi(h)| \geq |\varphi(h_N) - \varphi(h_N g^k)| > p(\alpha - \varepsilon).$$

Pasando al límite en p concluimos que $\alpha - \varepsilon \leq 0$. Siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, concluimos que $\alpha \leq 0$, por lo que ψ es no positiva. Un argumento análogo muestra que ψ es no negativa. Luego, ψ es idénticamente nula, es decir que $\varphi(h) = \varphi(gh)$ para todo $h \in \Gamma$, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 7.2.5. El teorema de Choquet-Deny fue generalizado para grupos nilpotentes por Margulis ????.

Ejemplo 7.2.6. Durante algún tiempo se pensó que los teoremas de Choquet-Deny y de Margulis (ejemplos 7.2.4 y 7.2.5 respectivamente) podían tal vez ser generalizados para grupos de crecimiento subexponencial. Sin embargo, Erschler probó recientementemente en [8] que para ciertos grupos de crecimiento intermediario existen medidas de probabilidad simétricas para las cuales el borde de Poisson correspondiente es no trivial (como veremos más adelante, tales medidas no pueden ser de soporte finito). Un problema interesante continúa siendo el caracterizar de manera concreta la familia de los grupos para los cuales todos los bordes de Poisson asociados son triviales. Otro problema consiste en saber si para todo grupo de crecimiento exponencial es posible definir una medida de probabilidad que tenga asociado un borde de Poisson no trivial (conjetura de Kaimanovich-Vershik).

El ejemplo a continuación muestra la existencia de grupos promediables sobre los cuales pueden ser definidas medidas de probabilidad induciendo bordes de Poisson no triviales.

Ejemplo 7.2.7. Denotemos por $\oplus_{\mathbb{Z}^k}\mathbb{Z}_2$ la suma directa de grupos isomorfos a $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ indexados por los puntos de coordenadas enteras de $\mathbb{R}^k$. Una manera apropiada de concebir este grupo consiste en pensarlo como el grupo aditivo de las configuraciones finitas de $\mathbb{Z}^k$ (respecto a la operación de suma módulo 2 sobre cada coordenada). El valor de una configuración $f \in \oplus_{\mathbb{Z}^k}\mathbb{Z}_2$ en un punto $x \in \mathbb{Z}^k$ será denotado por $f(x)$, y el soporte de f por $sop(f)$, es decir

$$sop(f) = \{x \in \mathbb{Z}^k : f(x) \neq 0\}.$$

Sea $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^k$ el producto en corona entre $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}^k$, es decir el producto semidirecto $\mathbb{Z}^k \rtimes \oplus_{\mathbb{Z}^k}\mathbb{Z}_2$ entre $\mathbb{Z}^k$ y $\oplus_{\mathbb{Z}^k}\mathbb{Z}_2$. La operación de grupo en Γ es dada por

$$(x_1, f_1)(x_2, f_2) = (x_1 + x_2, f_1 + T_{x_1}(f_2)),$$

donde la acción T de $\mathbb{Z}^k$ sobre $\oplus_{\mathbb{Z}^k}\mathbb{Z}_2$ es una acción por traslaciones:

$$T_x(f)(y) = f(y - x), \qquad x, y \text{ en } \mathbb{Z}^k, \quad f \in \oplus_{\mathbb{Z}^k}\mathbb{Z}^2.$$

El grupo Γ es soluble de orden 2 (en particular, Γ es promediable). Además, Γ es finitamente generado: un sistema de generadores es dado por $\{g_1, \ldots, g_k, \delta_0\}$, donde g_i designa el i-ésimo generador estándar de $\mathbb{Z}^k$ y δ_0 es la configuración de $\mathbb{Z}^k$ que es igual a 0 en todos los puntos salvo en el origen (donde asume el valor 1).

Dada una medida de probabilidad μ sobre Γ, denotemos por (x_i, f_i) los incrementos (i.i.d. según μ) de la caminata aleatoria asociada, de modo que

$$\omega_n = (y_n, g_n) = (x_1, f_1) \cdots (x_n, f_n)$$

representa la posición tras n pasos. Tenemos evidentemente

$$y_{n+1} = y_n + x_{n+1}, \qquad g_{n+1} = g_n + T_{y_n}(f_{n+1}).$$

Supongamos que k sea superior o igual a 3. Como toda caminata aleatoria no degenerada sobre $\mathbb{Z}^k$ es transiente para $k \geq 3$, la coordenada y_n tiende al infinito con probabilidad 1. Luego, si el soporte de μ es finito, entonces los soportes de la configuración $T_{y_n}(f_{n+1})$ y cualquier configuración fija de $\mathbb{Z}^k$ serán disjuntos. En consecuencia, la sucesión de valores de $g_n(y)$ es asintóticamente constante para todo $y \in \mathbb{Z}^3$. Esto genera evidentemente acontecimientos límites no triviales en medida, probando que el borde de Poisson $P(\Gamma, \mu)$ es no trivial.

Observación. Vale también si μ tiene primer momento finito (Kaimanovich) y más generalmente si μ tiene entropía finita (Anna). ???

En lo que sigue daremos una recíproca parcial al teorema 7.2.1: para todo grupo promediable es posible definir una medida de probabilidad para la cual el borde de Poisson es trivial. Esta afirmación corresponde a una conjetura de Furstenberg, demostrada independientemente por Rosenblatt [28] y por Kaimanovich y Vershik [19] a principios de los años 80. La prueba es lamentablemente un poco técnica; sin embargo, es natural que ello sea así, pues en general la medida que se obtiene es complicada, muchas veces de soporte no finito (vea el ejemplo).

Demostración de la conjetura de Furstenberg. Queremos probar que si Γ es promediable, entonces existe una medida de probabilidad μ sobre Γ tal que para todo $g \in \Gamma$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu^{*(n)} - g(\mu^{*(n)})\| = 0. \tag{7.3}$$

Esto lo haremos constructivamente.

Sea $K_0 \subset K_1 \subset \cdots$ una sucesión creciente de conjuntos finitos de Γ tales que K_0 contiene al elemento neutro y $\Gamma = \cup_i K_i$. Fijemos dos sucesiones (t_i) y (ε_i) de números reales positivos de manera que $\sum_i t_i = 1$, $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $\lim \varepsilon_i = 0$. Sea (n_i) una sucesión de enteros positivos tal que, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$(t_1 + \cdots + t_{i-1})^{n_i} \leq \varepsilon_i. \tag{7.4}$$

Como Γ es promediable, existe una sucesión (ν_m) de medidas de probabilidad de soporte finito sobre Γ tal que

$$\|\nu_m - g(\nu_m)\| \leq \varepsilon_m \qquad \text{para todo } g \in K_m \cup (sop(\nu_{m-1}))^{n_m}. \tag{7.5}$$

Afirmamos que la medida de probabilidad μ definida por

$$\mu = \sum_{m=1}^{\infty} t_m \nu_m$$

satisface la propiedad deseada (7.3). Para verificar esto, dado $g \in \Gamma$ fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $g \in sop(\nu_{m-1})$. Tenemos

$$\mu^{*(n_m)} = \sum_{k=(k_1,\cdots,k_{n_m})} t_{k_1}\cdots t_{k_{n_m}} \nu_{k_1} * \cdots * \nu_{k_{n_m}}.$$

La expresión de la derecha se divide en dos sumandos

$$\mu_1 = \sum_{|k|=\max\{k_i\}<m} t_{k_1}\cdots t_{k_{n_m}} \nu_{k_1} * \cdots * \nu_{k_{n_m}},$$

$$\mu_2 = \mu^{*(n_m)} - \mu_1.$$

La condición (7.4) implica

$$\|\mu_1\| = \sum_{|k|<m} t_{k_1}\cdots t_{k_{n_m}} = (t_1 + \cdots + t_{m-1})^{n_m} \leq \varepsilon_m. \tag{7.6}$$

Para las estimativas concernientes a la medida ν_2, fijemos un multi-índice $k = (k_1, \cdots, k_{n_m})$ tal que $|k| \geq m$. Sea $j \geq 1$ el menor índice para el cual se tiene $k_j \geq m$. Note que la medida $\theta = \nu_{k_1} * \cdots * \nu_{k_{n_m}}$ puede ser expresada de la forma

$$\theta = \theta_1 * \nu_{k_j} * \theta_2,$$

donde $\theta_1 = \nu_{k_1} * \cdots * \nu_{k_j-1}$ y $\theta_2 = \nu_{k_j+1} * \cdots * \nu_{k_{n_m}}$. Como $k_i < m$ para todo $i < j$, tenemos $sop(\nu_{k_i}) \subset sop(\nu_{m-1})$. La desigualdad $j < n_m$ nos da entonces la inclusión $sop(\theta_1) \subset (sop(\nu_{m-1}))^{n_m-1}$. Además de esto, como $g \in sop(\nu_{m-1})$, tenemos $sop(g(\theta_1)) \subset (sop(\nu_{m-1}))^{n_m}$. Debido a (7.5), esto implica que

$$\|\nu_{k_j} - g(\theta_1 * \nu_{k_j})\| \leq \varepsilon_m, \qquad \|\nu_{k_j} - \theta_1 * \nu_{k_j}\| \leq \varepsilon_m.$$

Luego,

$$\|g(\theta_1 * \nu_{k_j}) - \theta_1 * \nu_{k_j}\| \leq 2\varepsilon_m,$$

por lo que
$$\|g(\theta_1 * \nu_{k_j}) * \theta_2 - \theta_1 * \nu_{k_j} * \theta_2\| \leq 2\varepsilon_m,$$
es decir
$$\|g(\theta) - \theta\| \leq 2\varepsilon_m.$$
Como esta última desigualdad es válida para toda medida $\theta = \nu_{k_1} * \cdots * \nu_{k_{n_m}}$ que aparece en el desarrollo de μ_2, tenemos
$$\|g(\mu_2) - \mu_2\| \leq 2\varepsilon_m,$$
y como $\|\mu_1\| \leq \varepsilon_m$ (y consecuentemente $\|g(\mu_1)\| \leq \varepsilon_m$), concluimos finalmente que
$$\|g(\mu^{*(n_m)}) - \mu^{*(n_m)}\| \leq 4\varepsilon_m.$$
Puesto que la sucesión (ε_n) tiende a cero, de esta desigualdad se concluye (7.3), lo cual termina la demostración.

Ejercicio 7.2.8. Extensión promediable de Kaimanovich...

7.3 Entropía de grupos de tipo finito

7.3.1 Definiciones y propiedades generales

La noción de entropía para caminatas aleatorias sobre grupos fue introducida por A. Avez en [2]. Tal como dicho autor señala, la idea consistía en definir un invariante más fino que el crecimiento en el sentido de Milnor y Švarc. Sin embargo, con los años se constató que dicho invariante es de naturaleza bien diferente.

Como es lógico a la hora de definir entropías (de carácter métrico), consideramos la función $\mathcal{H} : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por
$$\mathcal{H}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(t) = -t\log(t) \quad \text{para} \quad t > 0.$$
Esta función es no negativa, continua y cóncava. Para comprender la "naturalidad" de ella, recomendamos la lectura de [4] (por una referencia en lengua castellana vea [25]).

Recordemos que, dada una partición $\mathcal{P}$ de un espacio de probabilidad (X, μ) en una familia contable de conjuntos medibles X_i, la entropía de $\mathcal{P}$ es definida por
$$H(\mathcal{P}, \mu) = \sum_i \mathcal{H}(\mu(X_i)).$$
Esta definición satisface la propiedad funtorial siguiente: dado otro espacio de probabilidad (Y, ν) y una aplicación $T : X \to Y$ tal que $T_*(\mu) = \nu$, se tiene
$$H(T(\mathcal{P})) \leq H(\mathcal{P}). \tag{7.7}$$
Notemos que no estamos suponiendo que T es biyectiva; si éste fuera el caso entonces tendríamos evidentemente $H(T(\mathcal{P})) = H(\mathcal{P})$.

En dinámica clásica se estudia la sucesión de los iterados $H(T^n(\mathcal{P}), \mu)$ cuando $T : X \to X$ es una aplicación que preserva μ. Se define $H(\mathcal{P}, T)$ como el límite de $H(T^n(\mathcal{P}), \mu)/n$, y la entropía de T (respecto a μ) es $h(T, \mu) = \sup_{\mathcal{P}} H(\mathcal{P}, T)$. Para nuestro caso seguiremos una idea similar. Nuestro "sistema dinámico T" será la caminata aleatoria, y "los iterados de T" corresponderán a los posibles estados de esta caminata tras el número correspondiente de pasos.

Consideremos la partición $\mathcal{P}$ de Γ en sus elementos y notemos
$$H_1(\mu) = H(\mu) = H(\mathcal{P}, \mu) = \sum_{g \in \Gamma} \mathcal{H}(\mu(g)).$$

Dada una caminata aleatoria (Γ, μ) (no necesariamente reversible), para cada $n \geq 1$ definimos

$$H_n(\mu) = \sum_{g \in \Gamma} \varphi(\mu^{*(n)}(e \to g)) = H(\mu^{*(n)}).$$

Observe que $H_n(\Gamma, \mu)$ puede ser igual a infinito si el soporte de μ no es finito. Sin embargo, es fácil verificar que si $H(\mu) = H_1(\mu)$ es finito entonces $H_n(\mu)$ es finito para todo $n \geq 1$ (vea la observación 7.3.2).

Lema 7.3.1. *Si $H_n(\mu) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión $(H_n(\mu))$ es subaditiva.*

Demostración. Basta probar la desigualdad

$$H(\mu_1 * \mu_2) \leq H(\mu_1) + H(\mu_2)$$

para dos caminatas aleatorias cualesquiera sobre el mismo grupo Γ. Esta desigualdad puede ser verificada directamente, utilizando para ello la propiedad de concavidad de la función $\mathcal{H}$. Proponemos en lo que sigue una prueba más conceptual.

La aplicación $\Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ dada por $(g, h) \mapsto gh$ envía la medida producto $\mu_1 \times \mu_2$ sobre $\mu_1 * \mu_2$. Por otra parte, se cumple la relación $H(\mu_1 \times \mu_2) = H(\mu_1) + H(\mu_2)$. Por la monotonicidad de la entropía, es decir por (7.7), tenemos

$$H(\mu_1 * \mu_2) \leq H(\mu_1 \times \mu_2),$$

de donde se obtiene la desigualdad deseada. $\square$

Observación 7.3.2. El mismo argumento de la demostración precedente permite probar que si $H_1(\mu) < \infty$ entonces $H_n(\mu) \leq nH(\mu) < \infty$ para todo $n \geq 1$. Recíprocamente, si $H(\mu)$ es infinito entonces $H_n(\mu)$ es infinito para todo $n \geq 1$.

Definición 7.3.3. Si $H(\mu) < \infty$ definimos

$$h(\Gamma, \mu) = \lim_{n \to \infty} \frac{H_n(\mu)}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{H(p^{(n)})}{n},$$

y extendemos esta definición por $h(\Gamma, \mu) = \infty$ si $H(\mu) = \infty$.

Ejemplo 7.3.4. Si $\mu = \tau\mu_1 + (1 - \tau)\mu_2$ entonces

$$\begin{aligned}
H(\mu^{*(n)}) &= \sum_{g \in \Gamma} \mathcal{H}((\tau\mu_1 + (1-\tau)\mu_2)^{*(n)})(g) \\
&= \sum_{g \in \Gamma} \mathcal{H}\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \tau^i (1-\tau)^{n-i} \sum_{h \in \Gamma} \mu_1^{*(i)}(h) \mu_2^{*(n-i)}(h^{-1}g)\right) \\
&\geq \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \tau^i (1-\tau)^{n-i} \sum_{g \in \Gamma} \mathcal{H}\left(\sum_{h \in \Gamma} \mu_1^{*(i)}(h) \mu_2^{*(n-i)}(h^{-1}g)\right) \\
&\geq \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \tau^i (1-\tau)^{n-i} \sum_{g,h \in \Gamma} \mathcal{H}\left(\mu_1^{*(i)}(h) \mu_2^{*(n-i)}(h^{-1}g)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \tau^i (1-\tau)^{n-i} \sum_{g,h \in \Gamma} \left(\mu_1^{*(i)}(h) \mathcal{H}(\mu_2^{*(n-i)}(h^{-1}g)) + \mu_2^{*(n-i)}(h^{-1}g) \mathcal{H}(\mu_1^{*(i)}(g))\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \tau^i (1-\tau)^{n-i} (H(\mu_1^{*(i)}) + H(\mu_2^{*(n-i)})) \\
&\geq \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \tau^i (1-\tau)^{n-i} (ih(\mu_1) + (n-i)h(\mu_2)) \\
&= n(\tau h(\mu_1) + (1-\tau)h(\mu_2)),
\end{aligned}$$

por lo que

$$h(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mu^{*(n)})}{n} \geq \tau h(\mu_1) + (1-\tau)h(\mu_2).$$

Luego, si la entropía de una combinación convexa de medidas μ_1 y μ_1 es positiva, entonces al menos una de las entropías originales es positiva.

En términos probabilísticos, $h(\Gamma, \mu)$ es la información promedio de uno de los factores de un producto $h_n = g_1 \cdots g_n$ de n variables aleatorias independientes $g_i \in \Gamma$ con distribución μ. Una formulación más precisa en términos de la teoría de la información viene dada por la siguiente versión del teorema de Shanon, Mc Millan y Breiman para caminatas aleatorias sobre grupos [19, 7].

Teorema 7.3.5. *Si μ es una medida de probabilidad sobre un grupo numerable Γ con entropía finita, entonces se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\log(h_n(\omega))}{n} = h(\Gamma, \mu),$$

donde la convergencia es tanto puntual en casi todo punto $\omega \in \Omega = \Gamma^{\mathbb{N}}$ como en $L^1(\Omega, \mathbb{P})$.

Demostración. Consideremos la sucesión de funciones $\varphi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi_n(\omega) = \mu^{*(n)}(h_n(\omega)).$$

Se verifica inmediatamente que para todo $\omega \in \Omega$ y todo $m \geq 0, n \geq 0$ se tiene la igualdad

$$\varphi_{n+m}(\omega) \leq \varphi_n(\omega) + \varphi_m(\sigma^n(\omega)).$$

Puesto que μ es de entropía finita, la función φ_1 pertence a $L^1(\Omega, \mathbb{P})$. La afirmación resulta así del teorema ergódico subaditivo.

Ejercicio 7.3.6. Bajo las condiciones del teorema precedente, pruebe que $h = h(\Gamma, \mu)$ es el (único) real que para todo $\varepsilon > 0$ satisface las propiedades siguientes:

- existe una sucesión de subconjuntos finitos A_n de Γ tales que $|A_n| \leq \exp(n(h+\varepsilon))$ y con $\mathbb{P}$-probabilidad 1 se tiene que $h_n(\omega) \in A_n$ para todos salvo eventualemente un número finito de índices $n \in \mathbb{N}$;

- para toda sucesión de subconjuntos finitos B_n de Γ tales que $|B_n| \leq \exp(n(h-\varepsilon))$, con $\mathbb{P}$-probabilidad 1 se tiene que $h_n(\omega) \in B_n$ sólo para un número finito de índices $n \in \mathbb{N}$.

Sugerencia. Para la primera parte considere la sucesión $A_n = \{g \in \Gamma : \mu^{*(n)}(g) \geq \exp(-n(h+\varepsilon))\}$ y aplique el teorema 7.3.5. Para la segunda parte considere $\Omega_n = \{\omega / \mu^{*(n)}(h_n(\omega)) \leq \exp(-n(h-\varepsilon/2))\}$. El teoreme 7.3.5 implica nuevamente que para casi todo $\omega \in \Omega$ está en todos salvo un número finito de los Ω_n Verifique que

$$\mathbb{P}[\omega \in \Omega_n : h_n(\omega) \in B-n] \leq \exp(-e/n)$$

y concluya usando el lema de Borel-Cantelli.

Para analizar la relación entre la entropía y el primer momento de una medida, necesitamos del siguiente lema elemental.

Lema 7.3.7. *Si una sucesión de números $\mu_n \in]0,1[$ satisface $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\mu_n < \infty$, entonces se cumple*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n \log(1/\mu_n) < \infty.$$

Demostración. Sea I el conjunto de los enteros positivos tales que $\log(1/\mu_n) < n$. se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n \log(1/\mu_n) &= \sum_{n\in I} \mu_n \log(1/\mu_n) + \sum_{n\notin I} \mu_n \log(1/\mu_n) \\ &\leq \sum_{n\in I} n\mu_n + \sum_{n\notin I} \mu_n \log(1/\mu_n).\end{aligned}$$

Ahora, si n no pertenece a I, entonces $e^{-n} \geq \mu_n$. Usando la desigualdad (válida para todo $t \in]0,1[$)

$$\sqrt{t}\log(1/t) \leq \frac{2}{e},$$

concluimos que

$$\sum_{n \notin I} \mu_n \log(1/\mu_n) \leq (2/e) \sum_{n \notin I} \sqrt{\mu_n} \leq (2/e) \sum_{n \notin I} e^{-n} < \infty,$$

lo cual finaliza la demostración. $\square$

Proposición 7.3.8. *Si μ es una medida de primer momento finito, entonces su entropía también es finita.*

Demostración. Sea d la cardinalidad del conjunto de generadores de Γ. La cardinalidad de cada esfera S_k está superiormente acotada por d^k, por lo que

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in S_k} -\mu(g)\log(\mu(g)) &= -\mu(S_k) \sum_{g \in S_k} \frac{\mu(g)}{\mu(S_k)} \log\left(\frac{\mu(g)}{\mu(S_k)}\right) - \sum_{g \in S_k} \mu(g)\log(\mu(S_k)) \\
&\leq \mu(S_k)\log(d^k) + \mu(S_k)\log(1/\mu(S_k)).
\end{aligned}$$

Por la hipótesis $M_1(\mu) < \infty$ y el lema anterior tenemos

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(S_k)\log(1/\mu(S_k)) = M < \infty,$$

de donde concluimos que

$$H(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{g \in S_k} -\mu(g)\log(\mu(g)) \leq \log(d) M_1(\mu) + M. \qquad \square$$

Relación con el crecimiento

Sean Γ un grupo de tipo finito y $\mathcal{G} = \{h_1, \cdots, h_m\}$ un sistema finito y simétrico de generadores de Γ. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por B_n a la "bola de radio n" de Γ definida por

$$B_n = \{g \in \Gamma : g = h_{i_1} \cdots h_{i_k} \text{ para ciertos } k \leq n \text{ y } h_{i_j} \in \mathcal{G}\}.$$

La función $n \mapsto |B_n|$ es llamada la función de crecimiento de Γ (relativa a $\mathcal{H}$). Es fácil verificar que

$$|B_{n_1+n_2}| \leq |B_{n_1}| \times |B_{n_2}|,$$

por lo que existe el límite

$$c_{\mathcal{G}}(\Gamma) = \lim_{n \to \infty} \frac{log(|B_n|)}{n} \leq (m-1) < \infty.$$

Decimos que Γ es de crecimiento exponencial si $c_{\mathcal{G}}(\Gamma) > 0$, y de crecimiento polinomial si existe un polinomio P tal que $|B(n)| \leq P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si ninguno de estos casos se da, decimos que Γ es de crecimiento intermediario. Es fácil verificar que estas nociones no dependen de la elección del sistema finito de generadores $\mathcal{G}$.

Supongamos que el soporte de la medida μ sea finito y engendre a Γ como semigrupo, es decir que para todo $g \in \Gamma$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $g_1, \cdots, g_n$ en el soporte de μ tales que $g = g_1 \cdots g_n$. Consideremos la función de crecimiento asociada al sistema generador $sop(\mu)$. Puesto que la entropía de una partición se maximiza cuando la medida es equidistribuída sobre dicha partición, tenemos

$$H(\Gamma, \mu^{*(n)}) \leq H(\Gamma \times \cdots \times \Gamma) \leq |B_n|,$$

de donde $h(\Gamma, \mu) \leq c_{sop(\mu)}(\Gamma)$. Concluimos en particular que si Γ es de crecimiento subexponencial, es decir si $c_{sop(\mu)}(\Gamma) = 0$, entonces $h(\Gamma, \mu) = 0$. $\square$

Debemos señalar que este resultado sencillo no se generaliza para medidas μ de soporte infinito.

Ejemplo 7.3.9. Si un grupo tiene crecimiento exponencial entonces no es necesariamente válido que la entropía asociada a las caminatas de soporte finito tengan entropía positiva. El siguiente ejemplo ha sido tomado de [19].

En el grupo $\Gamma = \mathbb{Z} \rtimes \oplus_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_2$ considere una medida simétrica que cargue sólo a los elementos $(-1,0)$, $(1,0)$ y $\delta_0 = (0,1)$. Como los incrementos (x_n, f_n) y las posiciones $\omega_n = (y_n, g_n)$ en tiempo n verifican $y_n = x_1 + \cdots + x_n$, y puesto que las x_i son variables aleatorias reales i.i.d., la desigualdad de Kolmogorov implica que

$$P(\{\omega : |y_k| \leq n^{3/4} \text{ para todo } k \leq n\}) \geq 1 - \frac{V(x)}{n^{3/2}},$$

donde $V(x)$ es la varianza de la distribución de los incrementos x_i. Definamos entonces

$$A_n = \{(y,g) : |y| \leq n^{3/4}, sop(g) \subset [-n^{3/4}, n^{3/4}]\}.$$

Se verifica fácilmente que la cardinalidad de A_n crece subexponencialmente. De lo anterior se concluye fcilmente que

$$H(\mu^{*(n)}) \leq |A_n| + \frac{V(x)}{n^{1/2}} \log(\delta_n),$$

donde δ es el valor mínimo para la medida asumida por un elemento sel soporte de μ. Dividiendo por n y pasando al límite obtenemos $h(\mu) = 0$. El mismo argumento se aplica en general para medidas simétricas de soporte finito: para todas ellas se tiene $h(\mu) = 0$.

Relación con la promediabilidad

Supongamos que μ sea simétrica y engendre a Γ como semigrupo. En tal caso, si $h(\Gamma, \mu) = 0$ entonces Γ es promediable, como resulta de la proposición siguiente.

Proposición 7.3.10. *Bajo las hipótesis precedentes se tiene*

$$h(\Gamma, \mu) \geq -2\log(\lambda(\Gamma, \mu)).$$

Demostración. Como la función logaritmo es cóncava, utilizando la desigualdad de Jensen se obtiene

$$-H(\Gamma, \mu) = \sum_{g \in \Gamma} p^{(n)}(e \to g) \log(p^{(n)}(e \to g)) \leq \log \left(\sum_{g \in \Gamma} p^{(n)}(e \to g) p^{(n)}(e \to g) \right).$$

Puesto que μ es simétrica, esta última expresión es igual a $p^{(2n)}(e \to e)$. Por lo tanto,

$$\frac{H(\Gamma, p^{(n)})}{n} \geq \log\left(\sqrt[n]{p^{(2n)}(e \to e)} \right),$$

y pasando al límite se obtiene la desigualdad deseada. $\square$

7.3.2 Entropía nula y trivialidad del borde de Poisson

La proposición precedente permite concluir que si $h(\Gamma, \mu) = 0$ para alguna medida de proba- bilidad μ entonces Γ es promediable. Sobre una eventual recíproca se discutirá en la sección 7.2.

Teorema 7.3.11. *Sea μ una medida de probabilidad sobre un grupo discreto Γ. Si la entropía inicial $H(\mu)$ es finita, entonces $h(\Gamma, \mu) = 0$ si y sólo si $P(\Gamma, \mu)$ es trivial.*

Demostración. Introducimos las particiones $\mathcal{A}_k$ y $\mathcal{B}_\backslash$ del espacio de trayectorias dadas por

$$(y_i) \sim_{\mathcal{A}_k} (y_i') \text{ si } y_i = y_i' \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, k\},$$

$$(y_i) \sim_{\mathcal{B}_n} (y_i') \text{ si } y_i = y_i' \text{ para todo } i \geq n.$$

La partición $\mathcal{B} = \cup \mathcal{B}_n$ es la partición en colas del espacio de sucesiones.

Afirmación. *Para todo* $0 < k \leq n$ *se tiene la igualdad*

$$H(\mathcal{A}_k|\mathcal{B}_n) = kH(\mu) + H(\mu^{*(n-k)}) - H(\mu^{*(n)}). \tag{7.8}$$

Prueba. Para cada trayectoria $y = (y_i)$ denotemos por $\mathcal{A}_k(y)$ y $\mathcal{B}_n(y)$ los átomos de $\mathcal{A}_k$ y $\mathcal{B}_n$ respectivamente que contienen a y. La probabilidad condicional $P(\mathcal{A}_k(y)|\mathcal{B}_n(y))$ es dada por

$$P(\mathcal{A}_k(y)|\mathcal{B}_n(y)) = \frac{P(\mathcal{A}_k(y) \cap \mathcal{B}_n(y))}{P(\mathcal{B}_n(y))} = \frac{\mu(y_1)\mu(y_2)\cdots\mu(y_k)\mu^{*(n-k)}(y_n)}{\mu^{*(n)}(y_n)}.$$

Tomando logaritmo a ambos lados e integrando respecto a μ se obtiene la igualdad (7.8).

Puesto que $\mathcal{B}_n$ es más fina que $\mathcal{B}_{n+1}$, se tiene la desigualdad $H(\mathcal{A}_k|\mathcal{B}_n) \leq H(\mathcal{A}_k|\mathcal{B}_{n+1})$, lo cual implica, debido a (7.8),

$$H(\mu^{*(n)}) - H(\mu^{*(n-1)}) \geq H(\mu^{*(n+1)}) - H(\mu^{*(n)}).$$

Concluimos así que la sucesión $(H(\mu^{*(n)}) - H(\mu^{*(n-1)}))$ decae hacia $h(\Gamma, \mu)$.

Como la sucesión de particiones $\mathcal{B}_n$ converge a la partición en colas $\mathcal{B}$, se tiene que $H(\mathcal{A}_k|\mathcal{B}_n)$ converge a $H(\mathcal{A}_k|\mathcal{B})$. A partir de (7.8) obtenemos entonces

$$H(\mathcal{A}_k|\mathcal{B}) = kH(\mu)0kh(\Gamma, \mu) = H(\mathcal{A}_k) - kh(\Gamma, \mu).$$

Luego, $h(\Gamma, \mu)$ es igual a 0 si y sólo si $H(\mathcal{A}_k|\mathcal{B}) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir si y sólo si las particiones $\mathcal{A}_k$ y $\mathcal{B}$ son independientes para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la ley $0-1$ de kolmogorov, esto se cumple si y śolo si el borde de Poisson $P(\Gamma\mu)$ es trivial. $\square$

La condición de finitud para $H(\mu)$ es claramente necesaria: si μ es una medida de probabilidad sobre un grupo abeliano Γ para la cual $H(\mu) = \infty$, el borde de Poisson $P(\Gamma, \mu)$ es inevitablemente trivial, debido al teorema de Choquet-Deny. De manera más general, si Γ es un grupo finitamente generado de crecimiento polinomial y μ es una probabilidad sobre él con entropía inicial $H(\mu)$ finita, entonces $h(\mu)$ es necesariamente igual a 0. Veremos a continuación que un enunciado análogo no es válido en general para grupos de crecimiento subexponencial: existen grupos de crecimiento intermediario para los cuales hay asociadas medidas de probabilidad de entropía inicial finita de modo que los borde de Poisson correspondientes no son triviales.

El método de Erschler para generar entropía [9].

$\mathcal{F}_n$ es una familia de n-uplas del tipo $(\omega, i_1, \ldots, i_k)$, con $\omega = (\omega_1, \ldots, \hat{\omega}_{i_1}, \ldots, \hat{\omega}_{i_k}, \ldots, \omega_n)$ e $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

Dados g, h en Γ y $u \in \mathcal{F}_n$, designamos por $S^{g,h}(u)$ al conjunto de los caminos cuyos pasos coinciden con los ω_i para todo $i \neq i_j$; en este último caso el factor puede ser igual a g o h. Diremos que $u \in \mathbb{F}_n$ es satisfactoria si los caminos de $S^{g,h}(u)$ arrivan a elementos distintos de Γ en tiempo n. Dicho conjunto de posibles salidas lo denotamos aún por $S^{a,b}(u)$; para n-uplas satisfactorias su cardinalidad es igual a 2^k.

Teorema 7.3.12. *Bajo las hipótesis anteriores, supongamos que existan constantes positivas* α *y* β *tales que:*

1- *para todo* $u = (\omega, i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{F}_n$ *se tiene* $k \geq \alpha n$*,*

2- *para todo* $u = (\omega, i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{F}_n$*, el conjunto* $S^{g,h}(u)$ *es satisfactorio,*

3- *si* u *y* v *son elementos distintos de* $\mathcal{F}_n$ *entonces* $S^{g,h}(u) \cap S^{g,h}(v) \neq \emptyset$*,*

4- *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene* $\mu^{*(n)}\left(\cup_{u \in \mathcal{F}_n}\right) S^{g,h}(u) \geq \beta$*.*

Entonces la entropía $h(\mu)$ *es diferente de 0. En consecuencia, si* $H(\mu) < \infty$*, entonces el borde de Poisson* $P(\Gamma, \mu)$ *es no trivial.*

Demostración. Cambiando μ por alguna de sus convoluciones y recordando que μ es no degenr=erada, vemos que es posible suponer, sin pérdida de generalidad que tanto g como h están en el soporte de μ. Consideremos la probabilidad normalizada

$$\nu(g,h) = \frac{\mu(h)\delta_g}{\mu(g)+\mu(h)} + \frac{\mu(h)\delta_h}{\mu(g)+\mu(h)}.$$

Claramente, la normalización de (la condicional) $\mu^{*(n)}$ a $S^{g,h}(u)$ coincide con el k[ésimo producto $\nu(g,h)$. Si η_n denota la partición del espacio de caminos infinitos Ω según el punto de alcance en n pasos, se tiene

$$\mathcal{H}(\mu^{*(n)}) = \mathcal{H}(\mu^{*(n)}|\eta_n).$$

Puesto que $\mathcal{H}(\nu(g,h)^k) = k\mathcal{H}(\nu(g,h))$, usando el hecho que la entropía condicional meida es menor o igual que la entrop]ía, concluimos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\mu^{*(n)}) &= \mathcal{H}(\mu^{*(n)}|\eta_n) \\
&\geq \sum_{u\in\mathcal{F}_n} \mu^{*(n)(S^{g,h}(u))}\mathcal{H}(\mu^{*(n)},\eta_n|S^{g,h}(u)) + \mu^{*(n)}(\psi)\mathcal{H}(\mu^{*(n)},\eta_n|\psi) \\
&\geq \sum_{u\in\mathcal{F}_n} \mu^{*(n)(S^{g,h}(u))}\mathcal{H}(\mu^{*(n)},\eta_n|S^{g,h}(u)) \\
&\geq \sum_{u\in\mathcal{F}_n} \mu^{*(n)(S^{g,h}(u))}\mathcal{H}(\mu(g,h)^k) \\
&= \sum_{u\in\mathcal{F}_n} \mu^{*(n)(S^{g,h}(u))}k\mathcal{H}(\mu(g,h)^k) \\
&\geq \ \geq \alpha\beta n\mathcal{H}(\nu(g,h)),
\end{aligned}$$

donde ψ denota el evento que la secuencia u no pertenezca a $\mathcal{F}_n$. Dividiensdo por n y pasando al límite concluimos finalmente que $h(\mu) \geq \alpha\beta\mathcal{H}(\nu(g,h))$.

Siguiendo [9], aplicaremos el método anterior para probar que, para una gran variedad de grupos expresables como productos en corona, toda medida de probabilidad simétrica de entropía finita induce un borde de Poisson trivial. De manera más precisa, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 7.3.13. *Sea $\Gamma = G \wr H$ un producto en corona de dos grupos tales que B no se reduce al elemento neutro. Si μ es una medida de probabilidad tal que A dotado de la medida inducida por proyección es un grupo transiente, entonces la entropía de μ es no nula.*

Demostración. Aplicaremos el método general para $g = e$ (elemento neutro de Γ) y $h = (e_G, f)$, donde $f : G \to H$ satisface $f(e_G) \neq e_H$. Como estamos suponiendo que μ es no degenerada, podemos suponer, módulo un cambio de μ por $\mu^{*(n)}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, que g y h pertenecen al soporte de μ.

Dados $0 < i_1 < \ldots < i_k \leq n$ y $x_s \in sop(\mu)$ para $s \neq i_j$, diremos que $u = (i_1,\ldots,i_k; x_1,\ldots,\hat{x}_{i_1},\ldots,\hat{x}_{i_n},\ldots,x_n)$ es una secuencia *apropiada* si los elementos x_1, x_1x_2, $x_1x_2\cdots\hat{x}_{i_1}$, ..., $x_1x_2\cdots\hat{x}_{i_1}\cdots\hat{x}_{i_k}\cdots x_n$ tienen proyecciones distintas en G. Afirmamos que si u y v son dos secuencias apropiadas distintas, entonces $S^{g,h}(u)$ y $S^{g,h}(v)$ son disjuntos. En efecto, si...

Una secuencia apropiada u será dicha c-apropiada si $k \geq cn$. Afirmamos que existen $p > 0$ y $c > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene la desigualdad

$$\mu^{*(n)}(\cup_u S^{g,h}(u)) \geq p,$$

donde la unión es tomada sobre todas las secuencias c-apropiadas. Para verificar esto, recuerda que si $R(n)$ designa el rango la caminata obtenida sobre G por proyección, entonces $R(n)/n$ converge con probabilidad 1 hacia $P - probabilidaddenoretornoalorigen > 0$.

Sea $R'(n)$ el número de elementos distintos de G que son visitados en dos momentos consecutivos $\leq n$ por la caminata. Se verifica fácilmente que para cierta constante $P' > 0$ se tiene la desigualdad $E_{\mu^{*(n)}}R'(n) \geq P'n$.

Afirmamos finalmente que si u es una secuencia apropiada, entonces $S^{g,h}(u)$ es una familia satisfactoria.

$\square$

Corolario 7.3.14. *Sea $\Gamma = G \wr H$ un producto en corona de dos grupos tales que B no se reduce al elemento neutro. Si A es infinito y no contiene a $\mathbb{Z}$ o a $\mathbb{Z}^2$ como subgrupos de índice finito, entonces la entropía correspondiente a cualquier medida de probabilidad sobre Γ es no nula.*

Una consecuencia del corolario anterior es el hecho que para $n \geq 2$ y $|B| > 1$, toda medida de probabilidad sobre un grupo de la forma $\Gamma = \mathbb{Z}^n \wr B$ tiene entropía no nula. Sin embargo, si B es promediable entonces Γ también lo es. En tal caso, el teorema ??? indica la existencia de medidas de probabilidad para las cuales el borde de Poisson asociado es trivial. Para una medida tal, la entropía debe ser necesariamente infinita.

7.3.3 Entropía condicional e identificación del borde de Poisson

7.4 La razón de escape al infinito: ley de los grandes números

La *razón de escape al infinito* corresponde a un parámetro que mide el comportamiento estadístico de la distancia al elemento neutro de un elemento representado por una palabra que es el producto de n generadores. En general, y dado que pueden producirse simplificaciones a lo largo de dicha palabra, es esperable que dicha distancia sea menor que n. Con la ayuda de este parámetro podremos refinar la desigualdad (???).

Definición 7.4.1. Sea Γ un grupo contable provisto de una medida de probabilidad μ. Se define la razón de escape al infinito de Γ con respecto a μ por

$$I = I(\mu) = \lim_{n \to \infty} \frac{\mathbb{E}(I_n)}{n}, \tag{7.9}$$

donde $\mathbb{E}(I_n)$ designa la esperanza de la función $I_n(\omega) = dist(h_1 \cdots h_n, e)$ respecto a $\mu^{*(n)}$.

Obviamente, debemos verificar que esta definición es pertinente, es decir que el límite correspondiente siempre existe. Ello es una consecuencia casi directa del teorema ergódico subaditivo. En efecto, la sucesión de funciones I_n satisface de manera evidente la desigualdad

$$L_{m+n}(w) = L_n(w) + L_m(\sigma^m(w)).$$

Tenemos entonces la convergencia c.t.p. de I_n/n hacia cierta función límite I. Puesto que el cambiar un segmento finito de w no altera el valor de dicho límite, la ley 0-1 de Kolmogorov implica que I es constante c.t.p. Finalmente, siendo siempre I_n/n menor o igual a 1, el teorema de convergencia dominada implica que dicho valor constante es igual a la razón de escape.

El hecho que $L_n(\omega)/n$ converja para casi toda trayectoria ω a la razón de escape al infinito puede ser pensado como la validez de una "ley de los grandes números" en el grupo Γ. Presentamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 7.4.2. Si en $\Gamma = \mathbb{Z}$ consideramos la probabilidad estándar entonces se comprueba fácilmente que la igualdad $I_{2n+1}(g_1 \cdots g_{2n+1}) = I_{2n}(g_1 \cdots g_{2n}) + 1$ se verifica con probabilidad $\frac{1}{2}\big[1 + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\big]$, mientras que $I_{2n+1}(g_1 \cdots g_{2n+1}) = I_{2n}(g_1 \cdots g_{2n}) - 1$ se cumple con probabilidad $\frac{1}{2}\big[1 - \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\big]$. Por otra parte, se tiene $\mathbb{E}(I_{2n+2}) = \mathbb{E}(I_{2n+1})$. Mediante la aproximación de Stirling se concluye que existen constantes positivas $\bar{c}, c$ tales que

$$\mathbb{E}(I_{2n+1}) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{2j}} \binom{2j}{j} \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{\bar{c}}{\sqrt{j}} \leq c\sqrt{n},$$

por lo que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n+1}}{2n+1} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{c\sqrt{n}}{2n+1} = 0,$$

de donde se concluye que $I = 0$.

Ejemplo 7.4.3. La razón de escape del grupo libre L_k respecto a la medida de probabilidad simétrica y equidistribuida sobre sus generadores es igual a $(k-1)/k$. Como ya analizamos el caso en que $k=1$, supondremos que k es al menos igual a 2. En tal caso, si $n \geq 1$ entonces con probabilidad $(2k-1)/2k$ se tiene $I(h_1 \cdots h_n h_{n+1}) = I(h_1 \cdots h_n) + 1$, mientras que $I(h_1 \cdots h_n h_{n+1}) = I(h_1 \cdots h_n) - 1$ se cumple con probabilidad $1/2k$. De ello se deduce que

$$\mathbb{E}_{\mu^{*(n+1)}} I_{n+1} = \mathbb{E}_{\mu^{*(n)}} I_n + \frac{2k-1}{2k} - \frac{1}{2k},$$

lo cual implica la igualdad $I = (k-1)/k$ vía un argumento sencillo de suma telescópica.

A continuación relacionaremos la razón de escape al infinito con el crecimiento, la entropía y la promedibilidad del grupo.

Teorema 7.4.4. *Si μ es una medida de probabilidad cuyo soporte es finito y genera a Γ como semigrupo, entonces se tiene la desigualdad*

$$h(\Gamma, \mu) \leq I(\mu) \cdot c_{sop(\mu)}(\Gamma).$$

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$ y denotemos por $X_{\varepsilon,n}$ al conjunto de elementos de Γ a los que se llega en n pasos de la caminata pero cuya distancia al elemento neutro se sitúa en el intervalo $[(1-\varepsilon)nI, (1+\varepsilon)nI)]$. La discusión anterior muestra que $\mu^{*(n)}(X_{\varepsilon,n}) \geq 1 - \varepsilon$ para n suficientemente grande. Escribamos la medida $\mu^{*(n)}$ como la combinación convexa de dos medidas de probabilidad $\mu_{1,n}$ y $\mu_{2,n}$, donde $\mu_{1,n}$ es la restricción normalizada de $\mu^{*(n)}$ a $X_{\varepsilon,n}$ y $\mu_{2,n}$ es la restricción normalizada de $\mu^{*(n)}$ al complemento de $X_{\varepsilon,n}$. Debido a (???),

$$H(\Gamma, \mu^{*(n)}) \leq (1-\varepsilon) H(\mu_{1,n}) - \log(1-\varepsilon) + \varepsilon \log(|B_n|).$$

Dividiendo por n y pasando al límite obtenemos

$$h(\Gamma, \mu) \leq (1-\varepsilon) \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{H(\Gamma, \mu_{1,n})}{n} + \varepsilon\, c_{sop(\mu)}(\Gamma). \tag{7.10}$$

Observe ahora que $X_{\varepsilon,n}$ está contenido en la bola $B(e, (1+\varepsilon)nI)$ de radio $(1+\varepsilon)nI)$ (respecto al conjunto generador $sop(\mu)$) centrada en el elemento neutro de Γ. Puesto que el valor de $H(\Gamma, \mu_{1,n})/n$ está acotado por $\log(|X_{\varepsilon,n}|)/n$, a partir de (7.10) obtenemos

$$h(\Gamma, \mu) \leq (1-\varepsilon) \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\log(|B(e, (1+\varepsilon)nI)|)}{n} + \varepsilon\, c_{sop(\mu)}(\Gamma).$$

Como el valor de $\log(|B(e, (1+\varepsilon)nI|)/n$ tiende a $(1+\varepsilon) I c_{sop(\mu)}(\Gamma)$ cuando n tiende al infinito, tenemos

$$h(\Gamma, \mu) \leq (1-\varepsilon^2) I c_{sop(\mu)}(\Gamma) + \varepsilon c_{sop(\mu)}(\Gamma).$$

Siendo esta desigualdad válida para todo $\varepsilon > 0$, concluimos finalmente que $h(\Gamma, \mu) \leq I c_{sop(\mu)}(\Gamma)$. □

Ejemplo 7.4.5. Para el caso de la medida simétrica y equidistribuida sobre los generadores del grupo libre L_k, la desigualdad anterior es una igualdad. Dejamos la prueba de ello al lector.

La desigualdad $h(\Gamma, \mu) \leq I(\mu) \cdot c_{sop(\mu)}(\Gamma)$ implica que si $I(\mu) = 0$ entonces $h(\Gamma, \mu) = 0$. La recíproca de esta última afirmación también es válida, de acuerdo a un resultado de N. Varopoulos [29] que nosotros probaremos siguiendo la técnica empleada en [1]. Para ello será necesario el siguiente lema elemental.

Lema 7.4.6. *Para $n \in \mathbb{N}$ consideremos la variable aleatoria X_n obtenida como suma de variables aleatorias i.i.d. que asumen los valores -1 y 1 con probabilidad $1/2$. Si para cada $k \in \mathbb{Z}$ se designa por Q_k el k-ésimo polinomio de Chebychev definido para $x \in [-1,1]$ por $Q_k(x) = \cos(n\theta)$, donde $cos(\theta) = x$, entonces se verifica la relación*

$$x^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X_n = k)\, Q_k(x). \tag{7.11}$$

Demostración. Para $z \in \mathbb{C}$ definimos

$$A_n(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(X_n = k)\, z^k.$$

De la relación

$$A_n(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(X_n = k)\, z^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{z^k}{2}\Big[p(X_{n-1} = k-1) + p(X_{n-1} = k+1)\Big] = \frac{1}{2}A_{n-1}(z)\Big[z + \frac{1}{z}\Big]$$

se deduce que $A_n(z) = \frac{1}{2^n}[z + 1/z]^n$. Utilizando esta igualdad para $z = e^{i\theta}$ y $z = e^{-i\theta}$ se obtiene

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X_n = k)\, [e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}] = \frac{1}{2^{n-1}} \left[e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right]^n,$$

es decir

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(X_n = k) \cos(k\theta) = \frac{1}{2^n}[e^{i\theta} + e^{-i\theta}]^n = \cos^n(\theta),$$

y puesto que $\cos(\theta) = x$, esta última igualdad es equivalente a (7.11). □

Proposición 7.4.7. *Existe una constante $C > 0$ que depende sólo de la distribución de μ sobre su soporte tal que, para todo $g \in \Gamma$ y todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mu^{*(n)}(g) \leq C\, \exp\Big(-C\, \frac{dist^2(e,g)}{n}\Big) \tag{7.12}$$

Demostración. Considere el operador de convolución $P : \ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Gamma)$, esta vez actuando sobre el espacio de funciones a valores complejos. Como μ es simétrica, P es un operador simétrico; además, P es una contracción (vea la sección 2.2). Luego, su espectro está contenido en el intervalo $[-1,1]$. Puesto que cada polinomio de Chebychev Q_k envía $[-1,1]$ sobre $[-1,1]$, el espectro del operador $Q_k(P)$ también está contenido en $[-1,1]$; en particular, $Q_k(P)$ también es una contracción.

Observe que a partir del lema precedente se deduce la identidad

$$P^n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X_n = k)\, Q_k(P).$$

Denotando por $\mathcal{X}_U$ la función característica del soporte de μ, para todo $g \in \Gamma$ tenemos

$$\langle \mathcal{X}_U, P^n(\mathcal{X}_{Ug})\rangle = \langle P^n(\mathcal{X}_U), \mathcal{X}_{Ug}\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X_n = k)\, \langle Q_k(P)(\mathcal{X}_U), \mathcal{X}_{Ug}\rangle.$$

Observe ahora que, para todo $m \in \mathbb{N}$, el soporte de la función $P^m(\mathcal{X}_U)$ está contenido en U^{m+1}. Luego, el soporte de $Q_k(P)(\mathcal{X}_U)$ está contenido en $U^{|k|+1}$. Este último conjunto intersecta a $gU = sop(\mathcal{X}_{Ug})$ si y sólo si $dist(e,g) \leq |k| + 2$. Concluimos así que

$$\langle \mathcal{X}_U, P^n(\mathcal{X}_{Ug})\rangle = \sum_{|k|\geq dist(e,g)-2} \mathbb{P}(X_n = k)\langle Q_k(P)(\mathcal{X}_U), \mathcal{X}_{Ug}\rangle \leq \sum_{|k|\geq dist(e,g)-2} \mathbb{P}(X_n = k)\, \|Q_k(P)(\mathcal{X}_U)\|^{1/2}\, \|\mathcal{X}_{Ug}\|^{1/2},$$

de donde se desprende que

$$\langle \mathcal{X}_U, P^n(\mathcal{X}_{Ug})\rangle \leq \sum_{|k|\geq dist(e,g)-2} \mathbb{P}(X_n = k)\, |U|^{1/2}\, \|\mathcal{X}_{Ug}\|^{1/2} = |U| \sum_{|k|\geq dist(e,g)-2} \mathbb{P}(X_n = k).$$

Por otra parte, el teorema central del límite nos da una constante universal $\bar{C}$ tal que

$$\sum_{|k|\geq dist(e,g)-2} \mathbb{P}(X_n = k) \leq \bar{C}\, \exp\Big(-\bar{C}\, \frac{dist^2(e,g)}{n}\Big),$$

de lo cual se concluye que

$$\langle \mathcal{X}_U, P^n(\mathcal{X}_{Ug})\rangle \leq \bar{C}|U| \exp\left(-\bar{C}\ \frac{dist^2(e,g)}{n}\right), \tag{7.13}$$

Podemos también minorar la expresión a izquierda remarcando que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{X}_U, P^n(\mathcal{X}_{Ug})\rangle &= \sum_{h\in U} P^n(\mathcal{X}_{Ug})(h)\mu(h) \\
&= \sum_{h\in U}\left(\sum_{f\in\Gamma}\mathcal{X}_{Ug}(hf)\mu^{*(n)}(f)\right)\mu(h) \\
&= \sum_{h\in U}\sum_{u\in U}\mu(h)\mu^{*(n)}(h^{-1}ug) \\
&= \sum_{u\in U}\mu^{*(n+1)}(ug) \\
&\geq C'\sum_{u\in U}\mu(u^{-1})\mu^{*(n+1)}(ug),
\end{aligned}$$

es decir

$$\langle \mathcal{X}_U, P^n(\mathcal{X}_{Ug})\rangle \geq C'\mu^{*(n+2)}(g), \tag{7.14}$$

donde $C' = \inf_{g\in sop(\mu)} 1/\mu(g)$. De (7.13) y (7.14) se desprende la desigualdad que se pretendía demostrar. □

Teorema 7.4.8. *Con las notaciones de la proposición precedente, se tiene la desigualdad $h(\Gamma,\mu) \geq CI(\mu)^2$. En particular, si $h(\Gamma,\mu) = 0$ entonces $I(\mu) = 0$.*

Demostración. De la desigualdad (7.12) se deduce, para todo $g \in \Gamma$ y todo $n \in \mathbb{N}$,

$$-\mu^{*(n)}(g)\log(\mu^{*(n)}(g)) \geq -\mu^{*(n)}(g)\log(C) + C\ \ \frac{\mu^{*(n)}(g)dist^2(e,g)}{n},$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\mu^{*(n)}) &\geq -\log(C) + \frac{C}{n}\sum_{g\in\Gamma}\mu^{*(n)}(g)dist^2(e,g) \\
&\geq -\log(C) + \frac{C}{n}\Big(\sum_{g\in\Gamma}\mu^{*(n)}(g)dist(e,g)\Big)^2.
\end{aligned}$$

Dividiendo por n y pasando al límite se obtiene la desigualdad $h(\Gamma,\mu) \geq C\,I(\mu)^2$. □

Capítulo 8

Apéndice

8.1 Ley 0-1 y desigualdad de Kolmogorov

Teorema 8.1.1. *Si $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ son variables aleatorias y $F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots)$ es una función medible en Ω^∞ tal que la probabilidad condicional $\mathbb{P}_{\varphi_1,\cdots,\varphi_n}[F(x) = 0]$ no depende de $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ para ningún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{P}[F = 0]$ es igual a 0 ó a 1.*

Demostración. Denotemos por A al evento $[F(x) = 0]$. Si $\mathcal{A}$ es el álgebra de los eventos definidos en términos de un número finito de variables, entonces para todo $B \in \mathcal{A}$ se tiene $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$. Supongamos que $\mathbb{P}(A)$ sea positivo. Entonces

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B),$$

de donde se deduce que $P(\cdot)$ y $P_A(\cdot)$ coinciden en $\mathcal{A}$. Luego, ambas probabilidades coinciden sobre la extensión de $\mathcal{A}$. En particualr, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_A(A) = 1$.

8.2 El teorema ergódico subaditivo

Como ejemplo de aplicación, veamos une criterio interesante de recurrencia para una caminata aleatoria.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ designemos por r_n la función *rango* de la caminata en n pasos. De manera más precisa, para cada $\omega \in \Omega$ el valor de $r_n(\omega)$ es igual a la cantidad de elementos distintos de Γ en $\{S_1(\omega), S_2(\omega), \ldots, S_n(\omega)\}$. Se tiene evidentemente la relación subaditiva

$$r_{m+n}(\omega) \leq r_m(\omega) + r_n(\sigma^m(\omega)).$$

El teorema ergódico subaditivo implica entonces que $r_n(\omega)/n$ converge c.t.p. a una constante $c \in \mathbb{R}$. Se desprende rápidamente de la definición que el valor de esta constante c es inferior o igual a 1.

Proposición 8.2.1. *La constante c es igual a la probabilidad de no retorno al origen. En particular, la caminata es recurrente si y sólo si r_n/n converge c.t.p. a 0.*

Demostración. Observe que para cada $i \in \mathbb{N}$ y cada $\omega \in \Omega$, el valor de $r_{i+1}(\omega) - r_i(\sigma(\omega))$ es igual a 1 si $S_1(\omega)$ no pertenece a $\{S_2(\omega), S_3(\omega), \ldots, S_{i+1}(\omega)\}$, e igual a 0 en caso contrario. En consecuencia, denotando por A al subconjunto de Ω dado por

$$\cap_{n\geq 1}\{\omega \in \Omega : S_n(\omega) \neq e\},$$

vemos que $r_{i+1} - r_i \circ \sigma$ converge a $\mathcal{X}_A \circ \sigma$. Así, la diferencia entre

$$\frac{r_n}{n} - \frac{r_0 \circ \sigma^n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(r_{i+1} \circ \sigma^{n-i+1} - r_i \circ \sigma^{n-i} \right)$$

y

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{X}_A \circ \sigma^{n-i}.$$

converge a 0 cuando n tiende al infinito. Del teorema ergódico de Birkhoff concluimos entonces que r_n/n converge a $\mathbb{P}(A)$. $\square$

A continuación veremos una aplicación menos estándar del teorema ergódico subaditivo, la cual fue utilizada en la sección ?.

Denotamos por R_n el *rango de reiteración de la caminata*, es decir el número de elementos distintos visitados hasta el tiempo n en dos momentos consecutivos de la caminata. Observe que el crecimiento de R_n es sublineal si el de r_n lo es; además, si $\mu(e) = 0$ entonces $R_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A continuación veremos que una afirmación recíproca es válida: si r_n crece linealmente y $\mu(e) > 0$, entonces R_n crece linealmente, con

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R_n}{n} \geq \mu(e) \lim_{n \to \infty} \frac{r_n}{n} = \mu(e) P(A).$$

Para verificar esta desigualdad notemos que, si bien la sucesión de funciones R_n no es subaditiva, ella satisface la desigualdad

$$R_{m+n}(\omega) \leq R_m(\omega) + R_n(\sigma^m(\omega)) + 1.$$

El teorema ergódico subaditivo es aplicable entonces a la sucesión de funciones $\omega \mapsto R_n(\omega) + 1$. Para encontrar la función límite (la cual es necesariamente constante), es necesario buscar un límite débil para la sucesión $R_i(\omega) - R_{i-1}(\sigma(\omega))$. Sin embargo, nosotros nos contentaremos sólo con una minoración. Observe que

$$R_i(\omega) - R_{i-1}(\sigma(\omega)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2, \\ 0 & \text{si } \omega_1 = \omega_2 \text{ pero existe } j \in \{1, \ldots, n-1\} \text{ tal que } \omega_1 = \omega_j = \omega_{j+1}, \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En particular, cuando i tiende al infinito, cualquier límite débil de $R_i(\omega) - R_{i-1}(\sigma(\omega))$ es mayor o igual que $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\omega_1 = \omega_2) = \mathbb{P}(A)\,\mu(e)$.

Bibliografía

[1] Alexopoulos, G. On the mean distance of random walks on groups. *Bull. Sci. Math.* **111** (1987), 189-199.

[2] Avez, A. Entropie des groupes de type fini. *C. R. Acad. Sci. Paris* **275** (1972), 1363-1366.

[3] Azencott, R. Espaces de Poisson des groupes localement compacts. *Lect. Notes in Math.* **148** (1970).

[4] Billingsley, P. *Ergodic theory and information theory.* Wiley Series in Prob. and Math. Statistics (1965).

[5] Choquet, G. & Deny, J. Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$. *C. R. Acad. Sci. Paris* **250** (1960), 799-801.

[6] Coulhon, T. & Saloff-Coste, L. Isopérimétrie pour les groupes et les variétés. *Rev. Math. Iber.* **9** (1993), 293-314.

[7] Derrienic, Y. Quelques applications du théorème ergodique sous-aditif. *Astérisque* **74** (1980), 183-201.

[8] Erschler, A. Boundary behavior for groups of subexponential growth. *Annals of Maths* **160** (2004), 1183-1210.

[9] Erschler, A. Liouville property or groups and manifolds. *Invent. Math.* **155** (2004), 55-80.

[10] Erschler, A. On drift and entropy for random walks on groups. *Ann. Probab.* **31** (2003), 1193-1204.

[11] Erschler, A. On isoperimetric profiles of finitely generated groups. *Geom. Dedicata* **100** (2003), 157-171.

[12] Følner, E. On groups with full Banach mean value. *Math. Scand.* **3** (1955), 243-254.

[13] Furstenberg, H. *Random walks and discrete subgroups of Lie groups.* Mem. of the AMS (1963).

[14] Furman, A. & Shalom, Y. Sharp ergodic theorems for group actions and strong ergodicity. *Ergodic Theory and Dynam. Systems* **19** (1999), 1037-1061.

[15] Grigorchuk, R. Symmetrical random walks on discrete groups. *Adv. Probab. Related Topics* **6**, Dekker, New York (1980), 285-325,

[16] Gromov, M. Random walk in random groups. *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), 73–146.

[17] Gromov, M. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Publ. Math. de l'IHES* **53** (1981), 53-73.

[18] Kaimanovich, V. The Poisson formula for groups with hyperbolic properties. *Annals of Maths* **152** (2000), 659-692.

[19] Kaimanovich, V. & Vershik, A. Random walks on discrete groups: boundary and entropy. *Ann. Probab.* **11** (1983), 457-490.

[20] Kesten, H. Full Banach mean values on countable groups. *Math. Scand.* **7** (1959), 146-156.

[21] Kesten, H. Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **92** (1959), 336-354.

[22] Kolmogorov, A. *Foundations of probability theory.* Chelsea Publ. Company (1933).

[23] Lubotsky, A. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures.* Progress in Mathematics, Birkhäuser (1995).

[24] Magnus, W., Karras, A. & Solitar, D. *Combinatorial group theory.* Interscience, New York (1966).

[25] Navas, A. *Entropías.* Notas de la V Escuela Chilena de Sistema Dinámicos (2005).

[26] Ortner, R. & Woess, W. Non-backtracking random walks and cogrowth of graphs. Prepublicación (2004).

[27] . ... ???

[28] Rosenblatt, J. Ergodic and mixing random walks on locally compact groups. *Math. Ann.* **257** (1981), 31-42.

[29] Varopoulos, N. Long rate estimates for Markov chains. *Bull. Sci. Math.* **109** (1985), 225-252.

[30] Vershik, A. Dynamic theory of growth in groups: entropy, boundaries, examples. *Russian Math. Surveys* **55** (2000), 667-733.

[31] Woess, W. *Random walks on infinite graphs and groups.* Cambridge Tracts in Mathematics **138** (2000).