Sobre desigualdades e identidades algebraicas

Andrés Navas

Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile, andres.navas@usach.cl.

La desigualdad clásica entre las media aritmética y geométrica, a saber,

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}, \qquad \text{donde } x_i \geq 0, \tag{1}$$

es tal vez la más hermosa de las desigualdades elementales. Por lo mismo, en la literatura existen muchos tratamientos de ella con diversas demostraciones: vea por ejemplo la referencia [2] (vea también el Problema 1 del apéndice de esta Nota para una prueba al parecer novedosa). Nuestro propósito aquí no es rediscutir la desigualdad desde una perspectiva clásica, sino presentar una aproximación puramente algebraica y no muy ampliamente conocida basada en una identidad notable.

Primeramente, reemplazando cada x_i por a_i^2, observamos que (1) es equivalente a que el polinomio

$$P_n(a_1,\ldots,a_n) := a_1^{2n}+a_2^{2n}+\cdots+a_n^{2n} - na_1^2a_2^2\cdots a_n^2$$

sólo asume valores no negativos. Ahora bien, una manera simple de mostrar que una expresión sólo toma valores no negativos consiste en reescribirla como suma de cuadrados. Motivado por una charla de Ricardo Baeza el año pasado, me pregunté si el polinomio P_n puede ser escrito como suma de cuadrados de polinomios. Tras obtener una respuesta afirmativa a esto, realicé una búsqueda en internet hasta constatar que "mi descubrimiento" correspondía a un teorema prácticamente olvidado del matemático alemán A. Hurwitz que data del año 1891 y que se resume en (la segunda de) las identidades

$$(a^{2(n-k)}-b^{2(n-k)})(a^2-b^2) = (a^2-b^2)^2\sum_{j=1}^{n-k-1} a^{2j}b^{2(n-k-j-1)},$$

$$P_n(a_1,\ldots,a_n) = \frac{1}{2(n-1)!}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\sigma\in S_n}\left(a_{\sigma(1)}^{2(n-k)}-a_{\sigma(2)}^{2(n-k)}\right)\left(a_{\sigma(1)}^2-a_{\sigma(2)}^2\right)a_{\sigma(3)}^2a_{\sigma(4)}^2\cdots a_{\sigma(k+1)}^2, \tag{2}$$

donde σ recorre el conjunto S_n de las $n!$ permutaciones de $\{1,\ldots,n\}$ (vea el apéndice para una "prueba guiada" de la segunda identidad). Observe que (2) también muestra que, en caso de igualdad en (1), todos los términos a_i^2 deben ser iguales. Como ejemplos ilustrativos de (2) tenemos la identidad evidente

$$P_2(a_1,a_2) = a_1^4+a_2^4-2a_1^2a_2^2 = (a_1^2-a_2^2)^2,$$

y el hecho que

$$2P_3(a_1,a_2,a_3) = 2a_1^6+2a_2^6+2a_3^6-6a_1^2a_2^2a_3^2$$

coincide con

$$a_1^2(a_1^2-a_2^2)^2+a_1^2(a_1^2-a_3^2)^2+a_1^2(a_2^2-a_3^2)^2+a_2^2(a_2^2-a_1^2)^2+a_2^2(a_2^2-a_3^2)^2+a_2^2(a_1^2-a_3^2)^2+a_3^2(a_3^2-a_1^2)^2+a_3^2(a_3^2-a_2^2)^2+a_3^2(a_1^2-a_2^2)^2$$

(alternativamente, se puede usar la identidad $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, la cual lamentablemente carece de análogo en más variables). Para $n=4$ obtenemos

$$P_4(a_1,a_2,a_3,a_4) = a_1^8+a_2^8+a_3^8+a_4^8-4a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2 = (a_1^4-a_2^4)^2+(a_3^4-a_4^4)+2(a_1^2a_2^2-a_3^2a_4^2)^2.$$

Dejamos al lector la tarea de desarrollar (pacientemente) la identidad para $n = 5$ y para valores mayores de n. Debemos señalar sin embargo que estas expresiones no siempre son optimales. En efecto, la expresión de P_{2n} arriba usa un número de cuadrados que es exponencial en n, pero existen reescrituras en las cuales el la cantidad de cuadrado utilizados es lineal en n (vea referencia [5]).

Inmediatamente surge una pregunta: ¿puede siempre una desigualdad entre polinomios (a coeficientes reales) ser reducida al hecho que cierta expresión polinomial puede ser reescrita como suma de cuadrados de polinomios (a coeficientes reales)? Como vemos a seguir, diversos ejemplos apuntan en una dirección afirmativa.

Ejemplo 1. Todo polinomio en una variable que es no negativo sobre toda la recta puede ser escrito como suma de cuadrados de polinomios: vea el Problema 3.

Ejemplo 2. La desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$(a_1^2 + \cdots a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \cdots a_n b_n)^2$$

puede ser inferida (junto con el caso de igualdad) de la identidad de Lagrange

$$(a_1^2 + \cdots a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) - (a_1 b_1 + \cdots a_n b_n)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Ejemplo 3. Dados exponentes $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_k$ y $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$, supongamos que las siguientes relaciones se satisfacen:

$$m_1 + \cdots + m_i \geq n_1 + \cdots + n_i \quad \text{para todo } 1 \leq i < k,$$

$$m_1 + \cdots + m_k = n_1 + \cdots + n_k.$$

Entonces para toda k-upla de reales no negativos $(x_1, \ldots, x_k)$ se tiene la desigualdad de Muirhead

$$\sum_{\sigma \in S_k} x_1^{m_{\sigma(1)}} \cdots x_k^{m_{\sigma(k)}} \geq \sum_{\sigma \in S_k} x_1^{n_{\sigma(1)}} \cdots x_k^{n_{\sigma(k)}}. \tag{3}$$

Por ejemplo, haciendo $m_1 = 1$, $m_2 = \ldots = m_k = 0$ y $n_1 = \ldots = n_k = 1/k$, lo anterior se reduce a la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica.

Si los exponentes m_i, n_i son enteros no negativos, entonces es posible probar (vea el Problema 4) que el polinomio correspondiente

$$P(a_1, \ldots, a_k) = \sum_{\sigma \in S_k} a_1^{2m_{\sigma(1)}} \cdots a_k^{2m_{\sigma(k)}} - \sum_{\sigma \in S_k} a_1^{2n_{\sigma(1)}} \cdots a_k^{2n_{\sigma(k)}}$$

puede ser escrito como suma de cuadrados de polinomios.

Pese a la evidencia anterior, la respuesta a nuestra pregunta no siempre es afirmativa. Este hecho ya era conocido por D. Hilbert, pero tal vez el ejemplo más simple que lo ilustra es el famoso polinomio de Motzkin [4] (vea el Problema 5)

$$M(a, b) = 1 - 3a^2 b^2 + a^2 b^4 + a^4 b^2.$$

Sin embargo, puede probarse que todo polinomio que asume sólo valores no negativos puede ser escrito como suma de cuadrados de funciones racionales. Esto corresponde a un teorema profundo debido a E. Artin [1] que responde al problema número 17 de la famosa lista de 20 problemas de Hilbert. A modo de ejemplo, para el polinomio de Motzkin tenemos

$$M(a, b) = \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2 + 1)(a^2 + b^2 - 2)^2 + (a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

No es nuestro propósito aquí el discutir las ideas de la demostración de Artin ni su inmensa influencia en el desarrollo de la teoría de los cuerpos ordenados y las aplicaciones de la lógica matemática a ella. Lo que quisiéramos es más bien invitar al lector a desarrollar los ejercicios/problemas del apéndice y, si estos logran despertar su interés, permitirle acceder a esta bonita teoría a través de la breve bibliografía entregada al final.

Apéndice: algunos problemas relacionados.

Problema 1: Una demostración inductiva y aparentemente novedosa (aunque no la más simple) de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica.
(i) Por la desigualdad para el caso de dos variables, para x, y, z no negativos tenemos

$$x + y \geq 2x^{1/2}y^{1/2}, \quad y + z \geq 2y^{1/2}z^{1/2}, \quad z + x \geq 2z^{1/2}x^{1/2}.$$

Sumando y diviendo por 2 obtenemos

$$x + y + z \geq x^{1/2}y^{1/2} + y^{1/2}z^{1/2} + x^{1/2}z^{1/2}.$$

Usando nuevamente la desigualdad para dos variables tenemos

$$x^{1/2}y^{1/2}+y^{1/2}z^{1/2} \geq 2x^{1/4}y^{1/2}z^{1/4}, \quad y^{1/2}z^{1/2}+z^{1/2}x^{1/2} \geq 2x^{1/4}y^{1/4}z^{1/2}, \quad z^{1/2}x^{1/2}+x^{1/2}y^{1/2} \geq 2x^{1/2}y^{1/4}z^{1/4},$$

lo que tras sumar y dividir por 2 nos da

$$x + y + z \geq x^{1/2}y^{1/2} + y^{1/2}z^{1/2} + x^{1/2}z^{1/2} \geq x^{1/2}y^{1/4}z^{1/4} + x^{1/4}y^{1/2}z^{1/4} + x^{1/4}y^{1/4}z^{1/2}.$$

Repitiendo el proceso k veces, pruebe usando inducción que

$$x + y + z \geq x^{m_k}y^{(1-m_k)/2}z^{(1-m_k)/2} + x^{m_k}y^{(1-m_k)/2}z^{(1-m_k)/2} + x^{(1-m_k)/2}y^{(1-m_k)/2}z^{m_k}, \qquad (4)$$

donde $m_1 = 0$ y $m_{k+1} = (1 - m_k)/2$. Usando esta relación de recurrencia pruebe (sin necesidad de calcular explícitamente el valor de m_k) que m_k converge al único punto fijo de la función $m \to (1 - m)/2$, es decir, a $1/3$. Pasando al límite la desigualdad (4), concluya que

$$x + y + z \geq 3x^{1/3}y^{1/3}z^{1/3}.$$

(ii) Generalice el argumento anterior para probar que la desigualdad para n variables implica la de $n + 1$ variables para todo $n \geq 2$.

Problema 2: La identidad de Hurwitz. Mediante argumentos de conteo, pruebe que el coeficiente del monomio $a_1^{2+2i}a_2^2 \cdots a_{n-i}^2$ en la expresión a derecha de (2) es igual a $-n$ si $i = 0$, a 1 si $i = n - 1$, y a 0 en otro caso. Concluya así la validez de la identidad de Hurwitz.

Problema 3: Polinomios no negativos de una variable. Sea $P(x)$ un polinomio tal que para todo $x \in \mathrm{R}$ se tiene $P(x) \geq 0$.

(i) Pruebe que P es de grado par.

(ii) Pruebe que toda raíz real de P tiene multiplicidad par.

(iii) Usando (ii) y aplicando la identidad

$$\big(x - (a + bi)\big)\big(x - (a - bi)\big) = (x - a)^2 + b^2$$

a cada par de raíces complejas conjugadas de P, concluya que P puede ser escrito como suma de cuadrados de binomios, monomios y reales positivos.

Problema 4: La desigualdad de Muirhead y sumas de cuadrados. Suponga que los exponentes m_i, n_i verifican las propiedades del Ejemplo 3 (lo cual denotaremos $(m_i) \succeq (n_i)$) y existe i tal que $m_i \neq n_i$.
(i) Pruebe que si i (resp. j) es el menor (resp. mayor) índice para el cual los exponentes no coinciden, entonces $m_i > n_i$ (resp. $m_j < n_j$).
(ii) Sean i, j índices tales que $m_i > n_i$, $m_j < n_j$, y $m_l = n_l$ para todo $i < l < j$. Sea

$$2\ell = \text{mín}\{m_i - n_i, n_j - m_j\}.$$

Definamos $m'_r = m_r$ si $r \neq i, j$ y $m'_i = m_i - \ell$, $m'_j = m_j + \ell$. Pruebe que $(m'_i) \succeq (n_i)$ y que el número de entradas del vector (m'_i) que coinciden con las correspondientes de (n_i) supera en 1 al número de entradas en común entre (m_i) y (n_i).
(iii) Defina $\ell' = m_i - m_j \geq \ell$. De la identidad

$$a^{2m_i}b^{2m_j} + b^{2m_i}a^{2m_j} - a^{2m_i-2\ell}b^{2m_j+2\ell} - b^{2m_i-2\ell}a^{2m_j+2\ell} = a^{2m_j}b^{2m_j}(a^{2\ell'-2\ell} - b^{2\ell'-2\ell})(a^{2\ell} - b^{2\ell}),$$

concluya que la expresión a izquierda puede ser escrita como suma de cuadrados de polinomios. Usando esto, concluya que lo mismo vale para la diferencia

$$\sum_{\sigma \in S_k} a_1^{2m_{\sigma(1)}} \cdots a_k^{2m_{\sigma(k)}} - \sum_{\sigma \in S_k} a_1^{2m'_{\sigma(1)}} \cdots a_k^{2m'_{\sigma(k)}}.$$

(iv) Usando (ii) y (iii) a lo más k veces, concluya que el polinomio

$$P(a_1, \ldots, a_k) = \sum_{\sigma \in S_k} a_1^{2m_{\sigma(1)}} \cdots a_k^{2m_{\sigma(k)}} - \sum_{\sigma \in S_k} a_1^{2n_{\sigma(1)}} \cdots a_k^{2n_{\sigma(k)}}$$

puede ser escrito como suma de cuadrados de polinomios.

Problema 5: Sobre el polinomio de Motzkin.
(i) Usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica (a 3 variables), pruebe que el polinomio $M(a,b) = 1 - 3a^2b^2 + a^2b^4 + a^4b^2$ no asume valores negativos.
(ii) Suponga que M puede escribirse como suma de cuadrados de polinomios M_i. Pruebe que cada M_i tiene grado a lo más 3. Analizando coeficientes, pruebe que M_i es combinación lineal de $1, ab, a^2b, ab^2$. Finalmente, obtenga una contradicción examinando el coeficiente de a^2b^2 en M y $\sum_i M_i^2$.

Problema 6: Límites de sumas de cuadrados. Aplicando el teorema de aproximación de Stone-Weiertrass, pruebe que toda función continua $f : \mathrm{R}^d \to \mathrm{R}$ que asume sólo valores no negativos puede ser aproximada uniformemente sobre los compactos por cuadrados de polinomios.

Problema 7: Sobre la desigualdad de Minkowski. Para todo $n \geq 1$ y toda familia de reales no negativos $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ se tiene (vea referencia [2])

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i)\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

¿Puede el polinomio

$$P(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i^{2n} + b_i^{2n}) - \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^2 + \prod_{i=1}^{n} b_i^2\right)^n$$

ser escrito como suma de cuadrados de polinomios?

Referencias

[1] E. ARTIN. Uber die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **5** (1927), 85-99.

[2] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD & G. PÓLYA. *Inequalities.* Cambridge Mathematical Library (1934).

[3] D. HURWITZ. Über den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels. Ver: *Math. Werke*, Basel, E. BerkhÃd'user (1933), 505-507.

[4] T. S. MOTZKIN. The arithmetic-geometric inequality. 1967 Inequalities (Proc. Sympos. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965), 205-224.

[5] B. REZNICK. A quantitative version of Hurwitz' theorem on the arithmetic-geometric inequality. *J. für die reine und ang. Math.* **377** (1987), 108-112.