Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 10, 2004

QUELQUES GROUPES MOYENNABLES DE DIFFÉOMORPHISMES DE L'INTERVALLE

ANDRÉS NAVAS

ABSTRACT. We consider the group of C^2 orientation preserving diffeomorphisms of the unit interval. We give a dynamical description of its subexponentially amenable subgroups. The results obtained can be extended to the group of orientation preserving piecewise affine homeomorphisms of the interval.

RÉSUMÉ. On considère le groupe des difféomorphismes directs et de classe C^2 de l'intervalle unité. On donne une description dynamique de ses sous-groupes sous-exponentiellement moyennables. Les résultats obtenus s'étendent au groupe des homéomorphismes directs et affines par morceaux de l'intervalle.

1. Introduction

Les sous-groupes du groupe des difféomorphismes de classe C^2 de l'intervalle satisfont certaines propriétés de rigidité qui permettent d'envisager une classification dynamique à partir de données algébriques rélévantes. Par exemple, on connaît très bien la structure des sous-groupes commutatifs. De plus, tout sous-groupe nilpotent doit être abélien. La classification des sous-groupes résolubles est aussi connue. Nous renvoyons le lecteur à [34] pour un rappel sur ces résultats ainsi que des références précises.

On sait par ailleurs que pour tout sous-groupe de type fini et non trivial Γ de $\mathrm{Diff}^1_+([0,1[)$, le premier espace de cohomologie $H^1(\Gamma,\mathbb{R})$ est non trivial (c'est une version du théorème de stabilité de Thurston ; voir [45]). Cela entraîne par exemple que tout sous-groupe de $\mathrm{Diff}^1_+([0,1[)$ ayant la propriété (T) de Kazhdan est trivial. Signalons en passant que ce dernier résultat s'étend pour les groupes de *difféomorphismes du cercle* : pour $\alpha > 1/2$, tout sous-groupe de type fini de $\mathrm{Diff}^{1+\alpha}_+(S^1)$ qui vérifie la propriété (T) de Kazhdan est fini (voir [36]). À cause de ceci et de [34], l'un des problèmes principaux dans la théorie des groupes de difféomorphismes du cercle est celui de la classification des groupes moyennables. Par un argument simple donné au §3 de [34], ce dernier problème se ramène au cas de l'intervalle.

Pour aboutir à une classification plus au moins complète des groupes de difféomorphismes de l'intervalle (et aussi ceux du cercle), l'un des problèmes qui se pose de manière naturelle est donc celui de la classification des sous-groupes *moyennables* de $\mathrm{Diff}^2_+([0,1])$. En fait, comme il a été expliqué au §6.2 de [34], dans le contexte des groupes localement compacts, ce problème

2000 *Mathematics Subject Classification*: 57S25, 57R30, 37E99, 20F16, 20F60.

Keywords and phrases: one dimensional dynamics, groups of diffeomorphisms, solvable, amenable.

Mots-clés: dynamique unidimensionelle, groupes de difféomorphismes, résoluble, moyennable.

se réduit à la classification des sous-groupes qui sont moyennables munis de la topologie *discrète* (notamment ceux de type fini). Cependant, même ce dernier problème semble être très compliqué, d'abord parce qu'il est difficile d'envisager une méthode pour l'aborder, et surtout parce qu'il est relié au problème de la moyennabilité du groupe F de Thompson. Rappelons que le groupe F a été originalement défini par R. Thompson comme étant celui constitué des homéomorphismes directs de $[0, 1]$ qui sont affines par morceaux, les points de discontinuité de la dérivée étant des rationnels dyadiques et les valeurs possibles de cette dérivée des puissances entières de 2. Néanmoins, dans [15] il est démontré que F se plonge dans le groupe des difféomorphismes directs et de classe C^{∞} de $[0, 1]$. La groupe F ne contient pas de sous-groupe libre à deux générateurs (voir [4]), et plusieurs auteurs ont essayé de montrer (encore sans succés) que ce groupe n'est pas moyennable (voir par exemple [7] et [23]). Ce problème possède une certaine importance en théorie des groupes.

En raison des problèmes expliqués ci-dessus, nous nous sommes contentés de résoudre des questions partielles liées au problème général. Dans ce travail nous allons décrire la dynamique d'une famille «particulière» de groupes moyennables : les groupes *sous-exponentiellement moyennables*. D'une manière imprécise, ces groupes sont obtenus à partir des groupes à croissance sous-exponentielle par des réunions directes et des extensions successives (voir le §2 pour plus de détails). Signalons que l'étude que nous allons entreprendre exclut *a priori* le groupe F de Thompson : la preuve faite dans [7] pour démontrer que F n'est pas élémentairement moyennable s'applique mot par mot pour démontrer que ce groupe n'est pas sous-exponentiellement moyennable non plus (nous verrons comment on peut redémontrer ce fait par une méthode complètement différente à celle de [7]). Signalons d'autre part que les groupes sous-exponentiellement moyennables *d'homéomorphismes directs de la droite* ont été déjà etudiés, d'un point de vue algébrique, dans le cadre de la théorie générale des groupes ordonnables. On sait par exemple que ces groupes sont localement indicables (voir [25] et [42]). Nous croyons que par des méthodes semblables à celles de cet article on devrait pouvoir étudier aussi les sous-groupes sous-exponentiellement moyennables du groupe des *difféomorphismes de la droite*.

Les techniques que nous appliquerons sont des raffinements de celles introduites dans [34] pour la classification des groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle. En fait, au lieu de travailler en classe C^2, nous considérerons directement les sous-groupes du groupe $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$ des difféomorphismes directs et de classe C^1 dont la variation du logarithme de la dérivée est finie sur chaque intervalle compact. Ceci rend les démonstrations plus élaborées, car on ne peut pas appliquer des techniques de contrôle de la distorsion «à la Sacksteder» ou utiliser *la théorie des niveaux* (voir [6]). Nous utilisons plutôt la méthode de N. Kopell pour contrôler la distorsion des conjuguées des applications de l'intervalle. L'intérêt d'obtenir des résultats en classse $C^{1+\mathrm{vb}}$ et non seulement en classe C^2 est la possibilité de pouvoir les éteindre dans des cadres plus généraux, comme par exemple celui du groupe $\mathrm{Afm}_+([0, 1[)$ des homéomorphismes directs et affines par morceaux de l'intervalle dont le nombre de points de discontinuité de la dérivée est fini sur chaque intervalle de la forme $[0, a]$, où $a < 1$.

Une autre approche au problème de la classification des sous-groupes moyennables de $\mathrm{Diff}_+^2([0,1])$ consiste à caractériser de manière claire la famille de ceux qui ne contiennent pas de sous-groupe libre à deux générateurs. Cependant, ce problème semble aussi être très compliqué. L'une des raisons de cela est le fait que la méthode classique pour trouver des sous-groupes libres à deux générateurs dans un groupe, à savoir le lemme du ping-pong de Klein (voir [22]), s'avère inapplicable pour des difféomorphismes (et en général pour des homéomorphismes) de l'intervalle. À manière d'exemple, signalons qu'il est connu que le groupe des homéomorphismes de la droite engendré par les applications $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x^3$ est libre (voir [9] et [47]). Cependant, les preuves existentes de ce résultat si intuitif sont très compliquées.

Une famille particulièrement intéressante de groupes sans sous-groupe libre à deux générateurs est celle des groupes qui vérifient une loi non triviale. Il est très probablement vrai que tout sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ qui vérifie une loi (non triviale) est résoluble. Cependant, puisque le groupe F de Thompson ne satisfait aucune loi (voir [4]), un tel résultat ne serait pas encore satisfaisant. Remarquons en passant que l'étude des sous-groupes de $\mathrm{Homéo}_+(\mathrm{S}^1)$ qui vérifient une loi se ramène à celle des groupes d'homéomorphismes de l'intervalle vérifiant une loi. Ceci découle aisément (de la preuve) d'un théorème dû à G. Margulis (voir [28] ou le premier appendice de [35]).

2. Notations et énoncés des résultats

Soit Γ un groupe de type fini et $\Gamma^1 = \{f_1, \cdots, f_k\}$ un système fini de générateurs de Γ. Pour $n \geq 2$ considérons la boule de rayon n

$$\Gamma^n = \{f \in \Gamma : f = f_{i_1}^{\pm 1} f_{i_2}^{\pm 1} \cdots f_{i_m}^{\pm 1} \text{ pour certains } f_{i_j} \in \Gamma^1 \text{ et } m \leq n\},$$

et notons $C(n)$ son cardinal. On dit que Γ est à *croissance polynomiale* s'il existe un polynôme P tel que $C(n) \leq P(n)$ pour tout n ; on dit que Γ est à croissance exponentielle s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ tels que $C(n) \geq C\lambda^n$ pour tout n ; finalement, on dit que Γ est à croissance *sous-exponentielle* si sa croissance n'est pas exponentielle. Ces notions ne dépendent pas du choix du système (fini) de générateurs.

Rappelons qu'un groupe topologique localement compact est *moyennable* si toute action continue de ce groupe par homéomorphismes d'un espace métrique compact préserve au moins une mesure de probabilité. Tout groupe de type fini et à croissance sous-exponentielle est moyennable. D'autre part, la famille des groupes moyennables est fermée par rapport aux opérations suivantes (dites *opérations élémentaires*) : passage à un quotient, passage à un sous-groupe, réunion directe et extension. Notons AG la famille des groupes moyennables discrets et SG la plus petite famille qui est fermée par rapport aux opérations élémentaires et qui contient les groupes discrets dont tous les sous-groupes de type fini sont à croissance sous-exponentielle. Les éléments de cette dernière famille sont appelés *groupes sous-exponentiellement moyennables*. Pour mieux expliquer cette définition, considérons les familles de groupes définies par récurrence par :

(i) SG_1 est la famille des groupes discrets dont tous les sous-groupes de type fini sont à croissance sous-exponentielle ;
(ii) si α n'est pas un ordinal limite alors SG_α est la famille des groupes obtenus par une extension

$$0 \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow 0,$$

avec $\mathrm{G} \in \mathrm{SG}_{\alpha-1}$ et $\Gamma/\mathrm{G} \sim \mathrm{H} \in \mathrm{SG}_1$;
(iii) si α est un ordinal limite alors SG_α est la famille des groupes obtenus comme une réunion directe de groupes dans SG_β, avec $\beta < \alpha$.

Question (2.1). Est-il vrai que AG = SG ?

Bien que tous les exemples connus de groupes moyennables discrets appartiennent à SG, le travail [20] de R. Grigorchuk et A. Żuk laisse entendre que la réponse à la question ci-dessus pourrait être négative. D'ailleurs, si dans la définition précédente on remplace la classe SG_1 par celle des groupes dont les sous-groupes de type fini sont abéliens à indice fini près, alors on obtient une famille plus petite de groupes, appelée la famille des *groupes élémentairement moyennables*. Pour plus de détails sur ce sujet on peut consulter [8] et [38].

Dans le cadre des difféomorphismes analytiques réels de l'intervalle, la description des sous-groupes sous-exponentiellement moyennables est très simple. En effet, dans [34] il est démontré que tout sous-groupe sous-exponentiellement moyennable de $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}([0,1[)$ est métabélien. Ceci reste valable dans $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathbb{R})$ (voir [33]). Plus généralement, les sous-groupes sous-exponentiellement moyennables et à points fixes isolés (au sens du §5 de [34]) de $\mathrm{Homéo}_+([0,1[)$ (resp. de $\mathrm{Homéo}_+(\mathrm{S}^1)$ ou de $\mathrm{Homéo}_+(\mathbb{R})$) sont métabéliens (resp. résolubles d'ordre de résolubilité au plus 3). Pour les groupes de difféomorphismes de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ de l'intervalle nous démontrons le résultat suivant, valable aussi pour les sous-groupes de $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$.

THÉORÈME (A). *Si un sous-groupe sous-exponentiellement moyennable* Γ *de* $\mathrm{Diff}^{1+\mathrm{vb}}_{+}([0,1[)$ *appartient à* SG_α *pour certain entier positif* α*, alors* Γ *est résoluble d'ordre de résolubilité inférieur ou égal à* α*.*

Le théorème précédent implique en particulier que tout sous-groupe de type fini de $\mathrm{Diff}^{1+\mathrm{vb}}_{+}([0,1[)$ et à croissance sous-exponentielle est abélien. Ceci généralise un résultat classique démontré par J. Plante et W. Thurston dans [41], suivant lequel les sous-groupes nilpotents de $\mathrm{Diff}^{1+\mathrm{vb}}_{+}([0,1[)$ sont abéliens (rappelons que les groupes nilpotents sont à croissance polynomiale ; voir [1]).

La preuve du théorème (A) est basée sur la classification dynamique des groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle, notamment sur le théorème suivant, qui porte un intérêt en soi.

THÉORÈME (B). *Soit* Γ *un sous-groupe résoluble de* $\mathrm{Diff}^{1+\mathrm{vb}}_{+}([0,1[)$ *d'ordre de résolubilité égal à* $k \geq 1$ *et sans point fixe à l'intérieur. Si* $\mathcal{N}(\Gamma)$ *désigne son normalisateur dans* $\mathrm{Diff}^{1}_{+}([0,1[)$*, alors on a les possibilités suivantes :*

(i) *si* $k > 1$ *alors* $\mathcal{N}(\Gamma)$ *est résoluble d'ordre de résolubilité égal à* k *;*
(ii) *si* $k = 1$ *et* Γ *n'est pas infini cyclique alors* $\mathcal{N}(\Gamma)$ *est topologiquement conjugué à un sous-groupe (éventuellement non commutatif) du groupe des transformations affines ;*

(iii) *si* $k = 1$ *et* Γ *est infini cyclique alors* $\mathcal{N}(\Gamma)$ *est topologiquement conjugué au groupe des translations.*

Il n'est pas vrai que tout sous-groupe sous-exponentiellement moyennable et de type fini de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ ou de $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$ est résoluble. Des exemples illustrant cette situation sont donnés au §6. Cependant, dans ce même paragraphe, nous donnons un aperçu d'une description dynamique des sous-groupes sous-exponentiellement moyennables de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$.

3. Rappel sur les difféomorphismes de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ de l'intervalle

Un difféomorphisme f de classe C^1 de l'intervalle $[0,1[$ (resp. de $[0,1]$) est de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ si la variation du logarithme de sa dérivée est finie sur chaque sous-intervalle compact $[a,b]$ de $[0,1[$ (resp. sur tout l'intervalle $[0,1]$). On note $\mathrm{Var}(\log(f'); [a,b])$ cette variation, c'est-à-dire

$$\mathrm{Var}(\log(f'); [a,b]) = \sup_{a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b} \sum_{i=1}^{n} |\log(f')(a_i) - \log(f')(a_{i-1})|.$$

On désigne par $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ (resp. $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1])$) le groupe des difféomorphismes de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ de l'intervalle $[0,1[$ (resp. de $[0,1]$). Le lemme suivant est une version généralisée du fameux lemme de N. Kopell. Une preuve tirée de [6] peut être trouvée dans [34].

LEMME (3.1). *Soient f et g deux difféomorphismes directs de l'intervalle $[0,1[$ sur leur images qui fixent 0 et préservent l'orientation. Supposons que f soit de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ et g de classe C^1, que $f(x) < x$ pour tout $x \in]0,1[$, que $g(x_0) = x_0$ pour certain $x_0 \in]0,1[$, et que chaque $x_n = f^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, soit un point fixe de g. Supposons de plus que $g(y) \geq z > y$ (resp. $g(y) \leq z < y$) pour certains $y, z \in]x_1, x_0[$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $g(f^n(y)) < f^n(z)$ (resp. $g(f^n(y)) > f^n(z)$) pour tout $n \geq N$.*

Comme une conséquence du lemme précédent on réobtient le lemme classique de N. Kopell : si f et g sont des difféomorphismes directs et commutants de l'intervalle $[0,1[$ de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ et C^1 respectivement, et si $\mathrm{Fix}(f) \cap]0,1[= \emptyset$ et $\mathrm{Fix}(g) \cap]0,1[\neq \emptyset$, alors g est l'identité. En particulier, l'action sur $]0,1[$ du centralisateur dans $\mathrm{Diff}_+^1([0,1[)$ d'un tel difféomorphisme f est libre. D'après le théorème de Hölder, cette action est semiconjuguée à celle d'un groupe de translations de la droite (voir [12], page 376). Ce groupe de translations est en fait tout $(\mathbb{R}, +)$. Ceci découle d'un théorème dû à G. Szekeres (remarquons que le théorème de Szekeres n'est en général énoncé qu'en classe C^2 ; or, une version subsiste en classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$, la démonstration de cette version générale étant une modification subtile de celle qui apparaît dans [49]). De plus, la semiconjugaison est en fait une conjugaison topologique. Ceci résulte par exemple du lemme élémentaire suivant, lequel est bien connu des spécialistes et se trouve implicite dans [34].

LEMME (3.2). *Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^1([0,1[)$ qui est semiconjugué à un sous-groupe dense du groupe de translations. Si Γ contient un élément de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ sans point fixe à l'intérieur de $[0,1]$, alors Γ est topologiquement conjugué au groupe de translations correspondant.*

Preuve. Supposons que Γ soit un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ qui est semiconjugué à un groupe dense de translations sans y être conjugué, et soit $f \in \Gamma$ l'élément donné par l'hypothèse. Sans perdre en généralité, on peut supposer que f est envoyé par l'homomorphisme induit par la semiconjugaison sur la translation $T_{-1} : x \mapsto x - 1$; en particulier, on a $f(x) < x$ pour tout $x \in]0,1[$. Fixons un intervalle $[a,b]$ qui soit envoyé sur un seul point par la semiconjugaison, et qui soit maximal pour cette propriété. Par la définition de $[a,b]$, il existe une suite croissante d'entiers positifs (n_i) telle que pour chaque $i \in \mathbb{N}$ il existe $\bar{f}_i \in \Gamma$ qui pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifie

$$\begin{aligned} &\bar{f}_i^{n_i}(f^n(a)) \geq f^{n+1}(a), \qquad && \bar{f}_i^{n_i+1}(f^n(a)) < f^{n+1}(a),\\ &\bar{f}_i^{n_i}(f^n(b)) \geq f^{n+1}(b), && \bar{f}_i^{n_i+1}(f^n(b)) < f^{n+1}(b). \end{aligned}$$

Notons $a_n = f^n(a)$, $b_n = f^n(b)$. En prenant la limite lorsque n tend vers l'infini dans les inégalités

$$\frac{\bar{f}_i^{n_i+1}(a_n)}{a_n} < \frac{f(a_n)}{a_n} \leq \frac{\bar{f}_i^{n_i}(a_n)}{a_n},$$

on obtient

$$(\bar{f}_i'(0))^{n_i+1} \leq f'(0) \leq (\bar{f}_i'(0))^{n_i}. \tag{3.3}$$

Pour $n \geq 0$ les intervalles $f^n(]\bar{f}_i(a), b[)$ sont deux à deux disjoints. Si l'on note $\delta = \mathrm{Var}(\log(f'); [0,b])$, alors pour tout u, v appartennant à $]\bar{f}_i(a), b[$ on a

$$\left|\log\left(\frac{(f^n)'(v)}{(f^n)'(u)}\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\log(f')(f^{i-1}(v)) - \log(f')(f^{i-1}(u))\right| \leq \delta. \tag{3.4}$$

En prenant la limite lorsque n tend vers l'infini dans l'inégalité

$$|\bar{f}_i([a,b])| = |f^{-n}\bar{f}_i f^n([a,b])| \geq \frac{\inf_{u\in[\bar{f}_i(a),b]}(f^n)'(u)}{\sup_{v\in[\bar{f}_i(a),b]}(f^n)'(v)} \cdot \inf_{x\in[f^n(a),f^n(b)]} \bar{f}_i'(x) \cdot |[a,b]|,$$

et en utilisant les estimées (3.3) et (3.4) on obtient, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$|\bar{f}_i([a,b])| \geq \exp(-\delta) \cdot (f'(0))^{1/n_i} \cdot |[a,b]| \geq C.$$

Néanmoins, ceci est absurde, car $|\bar{f}_i([a,b])|$ tend évidemment vers zéro lorsque i tend vers l'infini. $\square$

4. Rappel sur les groupes résolubles de difféomorphismes

Désignons par $r(1)$ la famille des groupes qui sont conjugués à des groupes non triviaux de translations. Désignons par $r(2)$ la famille de groupes qui sont soit conjugués à des sous-groupes non commutatifs du groupe affine, soit des produits semidirects entre $(\mathbb{Z},+)$ et un sous-groupe d'un produit direct (au plus dénombrable) de groupes conjugués à des groupes de translations non triviaux. Pour $k > 2$ définissons par récurrence la famille $r(k)$ des groupes qui sont des produits semidirects entre $(\mathbb{Z},+)$ et un sous-groupe d'un produit direct (au plus dénombrable) de groupes de $\mathcal{R}(k-1) = r(1) \cup \cdots \cup r(k-1)$, de telle sorte qu'au moins l'un des facteurs n'appartient pas à $\mathcal{R}(k-2)$. Voici l'un des résultats principaux de [34].

THÉORÈME. *Si* Γ *est un sous-groupe résoluble de* $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ *sans point fixe à l'intérieur de* $[0,1[$ *et d'ordre de résolubilité égal à* k*, alors* Γ *appartient à la famille* $r(k)$*.*

Bien sûr, celle-ci est une description plutôt algébrique des groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle. Cependant, au cours de la démonstration de ce résultat on décrit de manière assez claire la dynamique de ces groupes. Nous donnons dans la suite un résumé de cette description (la vérification des détails est immédiate à partir de [34]).

Rappelons d'abord qu'on dit qu'un intervalle (non réduit à un point) est une *composante irréductible* pour l'action d'un groupe s'il est invariant par ce groupe et aucun sous-intervalle fermé n'est invariant. Fixons un sous-groupe résoluble Γ de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ d'ordre de résolubilité égal à k et sans point fixe à l'intérieur de $[0,1[$. Notons

$$\{id\} = \Gamma_0^{\mathrm{sol}} \lhd \Gamma_1^{\mathrm{sol}} \lhd \cdots \lhd \Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol}} \lhd \Gamma_k^{\mathrm{sol}} = \Gamma$$

la série dérivée de Γ, c'est-à-dire que $\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol}} = [\Gamma_i^{\mathrm{sol}}, \Gamma_i^{\mathrm{sol}}]$ et $\Gamma_1^{\mathrm{sol}} \neq \{id\}$. Fixons une composante irréductible quelconque $[u_1, v_1[$ de Γ_1^{sol}, et pour $i \geq 2$ définissons par récurrence $[u_i, v_i[$ comme étant la composante irréductible de Γ_i^{sol} qui contient $[u_{i-1}, v_{i-1}[$. Pour chaque $i \geq 1$, le groupe $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$ constitué des éléments de Γ qui fixent ces composantes irréductibles est distingué dans Γ, et il est lui aussi un groupe résoluble (son ordre de résolubilité est égal à i lorsque $i \geq 2$, mais pour $i = 1$ il peut être égal à 2). Si $k \geq 2$ et Γ n'est pas conjugué à un sous-groupe du groupe affine, alors le groupe $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ est constitué des éléments de Γ qui possèdent des points fixes sur $]0,1[$. Deux cas peuvent se présenter, en justifiant ainsi la dichotomie de la définition de la famille $r(2)$.

Premier cas : les intervalles $[u_1, v_1[$ et $[u_2, v_2[$ coïncident.

Dans ce cas, la restriction de Γ_2^{sol} à $[u_2, v_2[$ est conjuguée à un groupe de transformations affines. Pour $i \in \{3, \cdots, k\}$ il existe un élément $f_i \in \Gamma_i^{\mathrm{sol}}$ de sorte que les intervalles $f_i(]u_{i-1}, v_{i-1}[)$ et $]u_{i-1}, v_{i-1}[$ sont disjoints, tel que le quotient $\Gamma_i^{\mathrm{sol}}|_{[u_i,v_i]}/\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol}}|_{[u_i,v_i]}$ (resp. $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}|_{[u_i,v_i]}/\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol},*}|_{[u_i,v_i]}$) est un groupe infini cyclique engendré par $f_i\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol}}|_{[u_i,v_i]}$ (resp. par $f_i\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol},*}|_{[u_i,v_i]}$), et tel que les points fixes de f_i à gauche et à droite de $[u_{i-1}, v_{i-1}[$ sont u_i et v_i respectivement.

Deuxième cas : les intervalles $[u_1, v_1[$ et $[u_2, v_2[$ ne coïncident pas.

Dans ce cas, la restriction de Γ_1^{sol} à $[u_1, v_1[$ est conjuguée à l'action d'un groupe de translations. Pour $i \in \{2, \cdots, k\}$ il existe un élément $f_i \in \Gamma_i^{\mathrm{sol}}$ de sorte que les intervalles $f_i(]u_{i-1}, v_{i-1}[)$ et $]u_{i-1}, v_{i-1}[$ sont disjoints, tel que le quotient $\Gamma_i^{\mathrm{sol}}|_{[u_i,v_i]}/\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol}}|_{[u_i,v_i]}$ (resp. $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}|_{[u_i,v_i]}/\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol},*}|_{[u_i,v_i]}$) est un groupe infini cyclique engendré par $f_i\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol}}|_{[u_i,v_i]}$ (resp. par $f_i\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol},*}|_{[u_i,v_i]}$), et tel que les points fixes de f_i à gauche et à droite de $[u_{i-1}, v_{i-1}[$ sont u_i et v_i respectivement.

Remarquons finalement que pour un même groupe Γ les deux possibilités ci-dessus peuvent coexister (bien entendu, sur des composantes irréductibles de $\Gamma_2^{\mathrm{sol},*}$ dont les orbites par Γ sont disjointes). Il faut tenir en compte aussi que chaque $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$ peut avoir des composantes irréductibles disjointes de l'intérieur de toute composante irréductible de $\Gamma_1^{\mathrm{sol},*}$. Cependant, la restriction de $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$

à ces composantes est résoluble d'ordre de résolubilité au plus égale à $i-1$. Pour cette restriction la description donnée plus-haut peut être appliquée une nouvelle fois...

Si l'on ajoute à ce qui précède la proposition de rigidité 2.3 de [34], alors on a une description assez précise de la dynamique des groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle. Dans la suite nous utiliserons cette description dynamique pour démontrer le théorème (B). Remarquons que les énoncés (ii) et (iii) de ce théorème sont élémentaires et ont été déjà démontrés dans [34]. Le cas où $k=2$ et Γ est conjugué à un sous-groupe du groupe affine est aussi élémentaire. Dans les autres cas, nous allons décrire la dynamique de $\mathcal{N}(\Gamma)$ en plusieurs étapes mais de manière assez claire.

Affirmation 1 *:* le groupe $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ est distingué dans $\mathcal{N}(\Gamma)$.

Ceci découle du fait qu'un élément de Γ appartient à $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ si et seulement s'il possède des points fixes à l'intérieur de $[0,1[$, et cette propriété est préservée par conjugaison.

Notons qu'une conséquence de cette affirmation est le fait que le groupe $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ agit comme un groupe de permutations des composantes irréductibles de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$.

Affirmation 2 *:* l'action de $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ sur cet ensemble de composantes irréductibles est libre.

Pour tout $f\in\mathcal{N}(\Gamma)$, l'élément $ff_kf^{-1}\in\Gamma$ n'a pas de point fixe sur $]0,1[$. Plus précisément, pour tout $x\in]0,1[$ on a $ff_kf^{-1}(x)<x$. Il existe donc $n\in\mathbb{N}$ et $g\in\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ dépendant de f tels que ff_kf^{-1} s'exprime sous la forme f_k^ng. D'autre part, pour toute composante irréductible $[u_{k-1},v_{k-1}[$ de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$, l'ensemble des composantes $f_k^j([u_{k-1},v_{k-1}[)$, $j\in\mathbb{Z}$, est préservé par cet élément ff_kf^{-1}. On en déduit aisément que $n=1$, et donc ff_kf^{-1} s'exprime sous la forme f_kg pour certain élément $g\in\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$.

Supposons que l'action en question ne soit pas libre et fixons une composante irréductible $[u_{k-1},v_{k-1}[$ de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ et un élément $f\in\mathcal{N}(\Gamma)$ tels que f fixe $[u_{k-1},v_{k-1}[$ et tels qu'il existe une composante irréductible $[a,b[$ de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ contenue dans $[f_k(v_{k-1}),u_{k-1}]$ vérifiant $f(a)\geq b$. Notons u et v les points fixes de f à gauche et à droite de $[a,b[$ respectivement. Remarquons que $u\geq f_k(v_{k-1})$ et $v\leq u_{k-1}$ (voir la figure 1). Pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe $g_n\in\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ tel que $ff_k^nf^{-1}=f_k^ng_n$, et donc $f_k^{-n}f^jf_k^n=(g_nf)^j$ pour tout $j,n\in\mathbb{N}$. Les intervalles $f_k^n([u_{k-1},v_{k-1}[)$, $n\in\mathbb{N}$, sont donc fixés par f. Par conséquence, $f'(0)=1$.

Notons $\delta=V(f_k;[0,v_{k-1}])$. L'estimée (3.4) appliquée à f_k permet de montrer que pour tout point $x\in]f_k(v_{k-1}),u_{k-1}[$ on a

$$\begin{aligned}((g_nf)^j)'(x)&=(f_k^{-n}f^jf_k^n)'(x)\\&\leq\frac{(f_k^n)'(x)}{(f_k^n)'(f_k^{-n}f^jf_k^n(x))}\cdot\sup_{y\in[0,f_k^n(u_{k-1})[}(f^j)'(y)\leq e^\delta\cdot\sup_{y\in[0,f_k^n(u_{k-1})[}(f^j)'(y).\end{aligned}$$

Puisque $f'(0)=1$, pour $n\in\mathbb{N}$ suffisamment grand on a $((g_nf)^j)'(x)\leq 2e^\delta$ pour tout $j\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]f_k(v_{k-1}),u_{k-1}[$. De même, on a $((g_nf)^j)'(x)\geq 1/2e^\delta$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]f_k(v_{k-1}), u_{k-1}[$ dès que $n \in \mathbb{N}$ est suffisamment grand. Fixons un tel entier positif n. En intégrant ces deux dernières inégalités on obtient $u + (x-u)/2e^{\delta} \leq (g_n f)^j(x) \leq u + 2e^{\delta}(x-u)$ pour tout $x \in]u, v[$. En particulier, en notant $[a_m, b_m] = f^{-m}([a,b])$, pour tout $j, m \in \mathbb{N}$ on a

$$u + (a_m - u)/2e^{\delta} \leq (g_n f)^j(a_m) \leq u + 2e^{\delta}(a_m - u). \tag{4.1}$$

Puisque l'élément g_n appartient à $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$, il fixe les intervalles $[a_m, b_m[$, et donc $(g_n f)^j(a_m) = f^j(a_m)$ pour tout $j, m \in \mathbb{N}$. Fixons m suffisamment grand de sorte que $u + 2e^{\delta}(a_m - u) < v$. Puisque $f^j(a_m)$ tend vers v lorsque j tend vers l'infini, pour $j \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on a $f^j(a_m) > u + 2e^{\delta}(a_m - u)$. On obtient ainsi

$$(g_n f)^j(a_m) > u + 2e^{\delta}(a_m - u),$$

ce qui contredit l'inégalité à gauche dans (4.1). Ceci finit la preuve de l'affirmation.

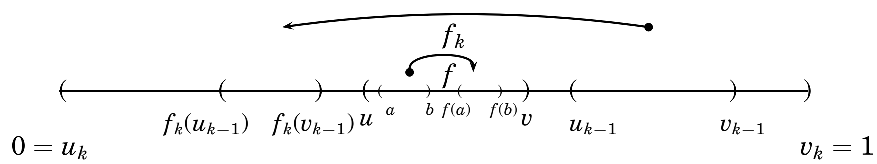

Figure 1

Fixons une composante irréductible quelconque $[u_{k-1}, v_{k-1}[$ de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ et définissons une relation d'ordre $\prec$ sur $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ par $f_1\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*} \prec f_2\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ lorsque $f_1([u_{k-1}, v_{k-1}[)$ est à gauche de $f_2([u_{k-1}, v_{k-1}[)$. Cette relation est totale, bi-invariante et archimédienne. L'argument de la preuve du théorème de Hölder (voir [12]) montre alors qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*} \longrightarrow \mathcal{N}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{H} \subset (\mathbb{R}, +) \longrightarrow 0.$$

Notons que l'image H est non triviale, car Γ ne fixe pas l'intervalle $[u_{k-1}, v_{k-1}[$.

Affirmation 3 *:* le groupe H est infini cyclique.

Dans le cas contraire le groupe $\mathcal{N}(\Gamma)$ serait semiconjugué à un groupe de translations sans y être conjugué, ce qui contredit le lemme (3.2).

Fixons un élément $\bar{f}_k$ tel que l'image de $\bar{f}_k\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ engendre ce groupe infini cyclique H et tel que l'intervalle $\bar{f}_k(]u_{k-1}, v_{k-1}[)$ soit à gauche de $]u_{k-1}, v_{k-1}[$. Il existe un entier positif n_k tel que $\bar{f}_k^{\,n_k}\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*} = f_k\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$. Le quotient entre $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ et $\Gamma/\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ est isomorphe au groupe fini cyclique d'ordre n_k, à cause de ce qui précède et de l'affirmation suivante.

Affirmation 4 *:* le stabilisateur dans $\mathcal{N}(\Gamma)$ des composantes irréductibles de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ agit trivialement sur le complément de ces composantes.

Supposons le contraire et fixons un intervalle $[a, b]$ contenu dans le complément des composantes irréductibles de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ tel qu'il existe $f \in \mathcal{N}(\Gamma)$ qui fixe ces composantes et qui vérifie $f(a) \geq b$. Notons u et v les points fixes de f à gauche et à droite de $[a, b]$ respectivement. L'élément ff_kf^{-1} s'exprime sous la forme f_kg pour certain $g \in \Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$. On a ainsi $f_k^{-1}ff_k = gf$. Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $a_n = f_k^n(a)$ et $b_n = f_k^n(b)$. Puisque g appartient à $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$, il fixe les points de l'intervalle $[u, v]$. D'après l'égalité $f_k^{-n}ff_k^n = (gf)^n$ on obtient $f_k^{-n}ff_k^n(a) = (gf)^n(a) = f^n(a) \geq b$, et donc $f(a_n) \geq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, contredisant ainsi le lemme (3.1).

Pour continuer la preuve du théorème (B), on raisonne par récurrence. À un sous-groupe distingué d'indice fini près (et pour lequel le quotient respectif est fini et cyclique), on se ramène à considérer le sous-groupe $\mathcal{N}_{k-1}(\Gamma)$ de $\mathcal{N}(\Gamma)$ constitué des éléments qui fixent les composantes irréductibles de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$. Si $[u_{k-1}, v_{k-1}[$ est une composante irréductible de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ alors la restriction $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}|_{[u_{k-1},v_{k-1}[}$ est distinguée dans la restriction $\mathcal{N}_{k-1}(\Gamma)|_{[u_{k-1},v_{k-1}[}$. On peut donc appliquer les arguments précédents sur $[u_{k-1}, v_{k-1}[$: le quotient entre les deux groupes correspondants est un groupe fini cyclique.

On peut continuer à appliquer ce raisonément à la restriction de $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$ à chacune de ses composantes irréductibles $[u_i, v_i[$ tant que l'on ne se soit pas ramené à l'un des cas suivants :

(i) la restriction de $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$ à l'intérieur de $[u_i, v_i[$ est conjuguée à un sous-groupe non commutatif du groupe affine ;

(ii) la restriction de $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$ à l'intérieur de $[u_i, v_i[$ est conjuguée à un sous-groupe non trivial du groupe des translations.

Affirmation 5 *:* dans ces deux derniers cas, la restriction de tout $f \in \mathcal{N}_i(\Gamma)$ à $[u_i, v_i[$ coïncide avec la restriction d'un élément de $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$ à ce même intervalle.

Par récurrence on vérifie aisément que la restriction de ff_kf^{-1} à $[u_i, v_i[$ est égale à celle d'un élément qui s'exprime sous la forme f_kg pour certain $g \in \Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$. Sur l'intervalle $[u_i, v_i[$ on obtient ainsi $f_k^{-1}ff_k = gf$, et donc $f_k^{-1}f^nf_k = (gf)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'argument de contrôle de la distorsion de la preuve de l'affirmation 2 permet de donner une borne uniforme sur $]u_i, v_i[$ des dérivées des applications $f_k^{-1}f^nf_k$, $n \in \mathbb{N}$. Ceci entraîne que la restriction de gf à $]u_i, v_i[$ est l'identité, et donc la restriction de f à $[u_i, v_i[$ coïncide avec celle de l'élément $g^{-1} \in \Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$.

Le théorème (B) découle aisément des affirmations précédentes.

Remarque (4.2). Notons qu'au cours de la preuve du théorème (C) nous avons démontré un fait qui *a priori* n'était pas évident : pour $i \in \{1, \cdots, k\}$, chacun des sous-groupes $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$ de Γ est distingué dans $\mathcal{N}(\Gamma)$. L'étude de la suite de groupes résolubles $\Gamma \subset \mathcal{N}(\Gamma) \subset \mathcal{N}(\mathcal{N}(\Gamma)) \subset \ldots$ semble être intéressante. Par exemple, on peut se demander si cette suite se stabilise en un nombre fini de pas ou si elle croît à chaque étape.

Malheureusement, il est difficile de donner des résultats précis sur la structure du groupe quotient $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma$. Ceci est dû au fait que $\mathcal{N}(\Gamma)$ peut contenir des difféomorphismes qui sont des «produits infinis» d'éléments de Γ dont les intérieurs des supports sont deux à deux disjoints. Voici un exemple d'une telle situation.

Exemple (4.3). Considérons le difféomorphisme f de $[0,1]$ et le champ de vecteurs X du deuxième exemple du §1 de [34]. Définissons un autre champ de vecteurs Y sur $[0,1]$ en posant $Y(x) = X(x)$ si $x \in [a,b]$ et $Y(x) = 0$ si $x \notin [a,b]$. Désignons par g le difféomorphisme obtenu en intégrant le champ X au temps 1, et par $\{h^t : t \in \mathbb{R}\}$ le flot associé à Y. Considérons maintenant le groupe Γ engendré par les éléments de ce flot et ceux de la famille $\{g^n f g^{-n} : n \in \mathbb{Z}\}$. C'est un groupe métabélien de difféomorphismes de l'intervalle. D'autre part, le difféomorphisme g appartient évidemment à $\mathcal{N}(\Gamma)$. Cependant, il n'est pas difficile de vérifier que l'on peut choisir les facteurs t_n de la définition du champ X de sorte que g n'appartienne pas à Γ, tout en respectant les propriétés de régularité de X. Notons que pour $x \in [f^{n+1}(b), f^n(b)]$ on a $g(x) = f^n h^{T_n} f^{-n}(x)$, où $T_n = \prod_{i=1}^n t_i$. Le difféomorphisme $g \in \mathcal{N}(\Gamma)$ peut ainsi être pensé comme étant «le produit infini» des éléments $f^n h^{T_n} f^{-n} \in \Gamma$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque (4.4). Une lecture attentive des arguments de [32] permet de vérifier que le théorème (B) s'étend au groupe $\mathcal{G}^{\omega}_{+}(\mathbb{R},0)$ (resp. $\hat{\mathcal{G}}^{\omega}_{+}(\mathbb{R},0)$) des germes de difféomorphismes (resp. de difféomorphismes formels) analytiques réels de la droite qui fixent l'origine et préservent l'orientation (voir la proposition 3.4 de [13]). Plus précisément, le normalisateur de tout sous-groupe résoluble Γ de $\mathcal{G}^{\omega}_{+}(\mathbb{R},0)$ ou de $\hat{\mathcal{G}}^{\omega}_{+}(\mathbb{R},0)$ est résoluble (et donc métabélien : voir le §6 de [34]). Dans ce contexte, la structure du groupe quotient $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma$ est à peu près claire. Des résultats analogues sont valables dans $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$, $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}([0,1[)$ et $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathbb{R})$ (ceci est à comparer avec [5]).

Les propriétés de rigidité des sous-groupes résolubles de $\mathrm{Diff}^{1+\mathrm{vb}}_{+}([0,1[)$ discutées plus haut donnent lieu à d'autres questions intéressantes. En voici deux exemples.

Exemple (4.5). Rappelons que deux groupes de type fini sont dits *quasi-isométriques* si leurs graphes de Cayley associés sont des espaces métriques quasi-isométriques (voir [14] pour plus de détails). Quelques propriétés algébriques, telles que la nilpotence et la moyennabilité, sont invariantes (à indice fini près) par quasi-isométrie. La résolubilité ne l'est cependant pas : un exemple concernant ce phénomène peut être trouvé dans [10]. La question qui se pose de manière naturelle dans notre contexte est la suivante : si Γ_1 est un sous-groupe résoluble et de type fini de $\mathrm{Diff}^{1+\mathrm{vb}}_{+}([0,1[)$ et Γ_2 est un groupe quasi-isométrique à Γ_1, alors Γ_2 est-il virtuellement résoluble ?

Exemple (4.6). Étant donné un groupe Γ engendré par une famille $\Gamma^1 = \{f_i\}$ d'éléments, on pose $\Gamma(0) = \{id\}$, $\Gamma(1) = \Gamma^1$, et pour $k \geq 2$ on définit par récurrence

$$\Gamma(k) = \{[f^{\pm 1}, g^{\pm 1}] : f \in \Gamma(k-1), g \in \Gamma(k-1) \cup \Gamma(k-2)\}.$$

On dit que Γ est *pseudo-résoluble* s'il existe $n \geq 1$ tel que $\Gamma(n)$ est réduit à l'identité.

Remarquons que si l'on définit de manière analogue la notion de *pseudo-nilpotence*, alors il est facile à démontrer que tout groupe pseudo-nilpotent est en fait nilpotent. L'existence de groupes pseudo-résolubles et non résolubles a été déjà remarquée dans [13]. Dans ce même article, il est démontré que tout sous-groupe pseudo-résoluble de $\mathrm{Diff}_+^{\omega}(\mathrm{S}^1)$ est résoluble. Nous ignorons si ceci reste vrai pour les sous-groupes de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}(\mathrm{S}^1)$ ou de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$.

5. Sous-groupes à croissance sous-exponentielle de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$

Parmi les groupes à croissance exponentielle on trouve les groupes fondamentaux de variétés compactes à courbure négative (voir [31] et [44]), les groupes résolubles non virtuellement nilpotents (voir [1], [30] et [48]), les sous-groupes non virtuellement nilpotents des groupes de Lie (voir [46]). Enfin, si Γ contient un semigroupe libre à deux générateurs alors sa croissance est exponentielle, mais la réciproque n'est pas toujours valable (voir [37]). D'autre part, un théorème célèbre dû à M. Gromov stipule qu'un groupe de type fini est à croissance polynomiale si et seulement si il contient un sous-groupe nilpotent d'indice fini (voir [21]).

Le résultat général suivant est à comparer avec quelques résultats obtenus par J. Plante et W. Thurston dans [41], suivant lesquels tout sous-groupe nilpotent de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ (resp. de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}(\mathbb{R})$) est abélien (resp. métabélien). À la fin de ce paragraphe nous étudierons un contre-exemple à la proposition ci-dessous dans le cas où l'hypothèse de régularité n'est pas satisfaite.

PROPOSITION (5.1). *Si Γ est un sous-groupe à croissance sous-exponentielle de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ (resp. de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}(\mathbb{R})$), alors Γ est abélien (resp. métabélien).*

La preuve de cette proposition sera obtenue à partir de quelques lemmes dont les idées seront importantes dans la suite. Commençons par formaliser un critère simple et bien connu pour trouver des semigroupes libres à l'intérieur d'un groupe d'homéomorphismes de la droite.

LEMME (5.2). *Soient f et g deux homéomorphismes directs de la droite. Supposons qu'il existe un intervalle $[a,b]$ tel que $\mathrm{Fix}(f) \cap [a,b] = \{a,b\}$ et tel que soit $g(a) \in]a,b[$, soit $g(b) \in]a,b[$. Alors le groupe engendré par f et g contient un semigroupe libre à deux générateurs.*

Preuve. Supposons le premier cas, l'autre étant analogue. Quitte à changer f par son inverse, on peut supposer que $f(x) < x$ pour tout $x \in]a,b[$. Notons $c = g(a) \in]a,b[$ et fixons un point $d' \in]c,b[$. Puisque $gf^n(a) = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque $gf^n(d')$ converge vers c lorsque n tend vers l'infini, pour n suffisamment grand il existe au moins un point fixe de gf^n sur $[a,d']$. Fixons un tel entier positif N et considérons l'infimum d des points fixes de gf^N sur $]a,b[$. Pour $M \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on a $f^M(d) < c$. Une application simple du lemme du ping-pong de Klein sur $[a,b]$ montre finalement que le semigroupe engendré par f^M et gf^N est libre (voir [22]). □

Le lemme (3.1) permet d'établir un autre critère pour trouver des semigroupes libres dans des sous-groupes de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ qui sera assez souvent utilisé. Il jouera parfois le rôle de l'un des résultats de [43] (voir aussi [27]), suivant lequel tout groupe de type fini, résoluble et non virtuellement nilpotent, contient un semigroupe libre à deux générateurs.

LEMME (5.3). *Soient f et g deux éléments de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ tels que $f(x) < x$ pour tout $x \in]0,1[$ et soit $[u,v]$ un intervalle contenu dans $]0,1[$ tel que $g(x) < x$*

pour tout $x \in]u, v[$, $g(u) = u$, $g(v) = v$ et $f(v) \leq u$. Soit $[a, b] \subset]u, v[$ un intervalle tel que $g(b) \leq a$. Supposons que pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ on ait que soit $f^{-n}g^i f^n([a, b])$ est égal à $g^i([a, b])$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, soit $f^{-n}g^i f^n([a, b])$ est égal à $g^{-i}([a, b])$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, soit $f^{-n}g^i f^n([a, b])$ est égal à $[a, b]$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Alors le semigroupe engendré par f et g est libre.

Preuve. Par commodité, pour $n \in \mathbb{Z}$ notons $a_n = f^n(a)$. D'après l'hypothèse et le lemme (3.1), pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on a $g(a_n) = a_n$. Fixons le plus petit de ces entiers positifs N. Soient $A = f^n g^{m_r} f^{n_r} \cdots g^{m_1} f^{n_1}$ et $B = g^q f^{p_s} g^{q_s} \cdots f^{p_1} g^{q_1}$ deux mots, avec m_i, n_i, p_i, q_i des entiers positifs, $n \geq 0$ et $q \geq 0$. On doit démontrer que A et B ne représentent pas le même élément du groupe engendré par f et g. Pour cela il suffit de remarquer que, par la définition de N, on a $A(a_{N-1}) = a_M$, où $M = N - 1 + n + \sum_i n_i$, alors que si l'on note $M' = \sum_i p_i$ on a $B(a_{N-1}) = f^{M'}(g^{q_1}(a_{N-1}))$, et ce dernier point ne peut pas être égal à aucun des a_n, comme l'on vérifie aisément à partir du fait que $g^{q_1}(a_{N-1}) \neq a_{N-1}$. □

Voici finalement un lemme qui donne la structure des groupes virtuellement abéliens de difféomorphismes de l'intervalle.

LEMME (5.4). *Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$. Si Γ contient un sous-groupe abélien d'indice fini alors Γ lui aussi est abélien.*

Preuve. Soit $[a, b[$ l'une des composantes irréductibles du sous-groupe abélien d'indice fini Γ_0. Il est facile de voir que $[a, b[$ est aussi une composante irréductible de Γ. On se ramène ainsi au cas où Γ_0 n'a pas de point fixe à l'intérieur de $[0, 1[$. D'après le §3, le groupe Γ_0 est contenu dans le flot topologique associé à n'importe quel de ces éléments non triviaux. Si f appartient à Γ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que f^n appartient à Γ_0. Le difféomorphisme f^n appartient donc au flot qui contient Γ_0. Par conséquence, f lui aussi appartient à ce flot. On en déduit que Γ est contenu dans un groupe à un paramètre. En particulier, il est abélien. □

Remarque (5.5). Le lemme précédent s'étend aux groupes résolubles. Plus précisément, si un sous-groupe Γ de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$ contient un sous-groupe d'indice fini et résoluble d'ordre de résolubilité égal à $k \geq 1$, alors Γ lui aussi est résoluble d'ordre k. La preuve est obtenue à l'aide du théorème (B). Ceci est à comparer avec la remarque du §3 de [39], suivant laquelle les sous-groupes virtuellement polycycliques de $\mathrm{Diff}_+^2([0, 1[)$ (et en fait de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$) sont eux aussi polycicliques. Des résultats analogues sont valables pour des sous-groupes virtuellement résolubles de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}(\mathrm{S}^1)$ et de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}(\mathbb{R})$. Finalement, tout sous-groupe virtuellement résoluble de $\hat{\mathcal{G}}_+^{\omega}(\mathbb{R}, 0)$ est métabélien. Ce dernier fait est obtenu aisément à partir de la classification de Nakai (voir [32] ou bien [13] et [34]).

Preuve de la proposition (5.1). Considérons d'abord le cas de l'intervalle. Sans perte de généralité, on peut supposer que Γ n'a pas de point fixe sur $]0, 1[$. Comme la croissance de Γ est sous-exponentielle, il existe une mesure de Radon ν sur $]0, 1[$ qui est invariante par l'action de Γ (voir [40]). Si cette mesure n'a pas d'atome alors Γ est semiconjugué à un sous-groupe dense du groupe des translations. D'après le lemme (3.2), Γ est conjugué à un groupe de translations. En particulier, Γ est abélien.

Supposons maintenant que ν possède (au moins) un atome $p \in]0,1[$. Soient $p_n, n \in \mathbb{Z}$, les points de l'orbite de $p = p_0$ ordonnés de manière telle que $p_n > p_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il existe $f \in \Gamma$ tel que $f(p) = p_1$, et donc $f^n(p) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Le groupe des commutateurs $\Gamma' = [\Gamma, \Gamma]$ est contenu dans le stabilisateur Γ^* des intervalles $[p_{n+1}, p_n]$. Pour finir la preuve de l'abélianité de Γ, nous allons montrer que cet stabilisateur Γ^* est trivial.

Supposons le contraire. Le groupe Γ^* est distingué dans Γ et Γ/Γ^* est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$; son générateur est $f\Gamma^*$. Supposons d'abord que la restriction de Γ^* à chacun des intervalles $]p_{n+1}, p_n[$ soit abélienne. Dans ce cas Γ est résoluble. D'après [21], [30], [41], [43] ou [48], le fait que Γ est à croissance sous-exponentielle entraîne qu'il est nilpotent à indice fini près. Par le théorème de Plante et Thurston, Γ est abélien à indice fini près (voir [41]). Finalement, d'après le lemme (5.4), Γ est abélien.

Supposons maintenant que la restriction de Γ^* à l'intervalle $]p_1, p_0[$ ne soit pas abélienne et fixons une composante irréductible $[u, v]$ de Γ^* sur laquelle la restriction correspondante ne soit pas conjuguée à un groupe de translations. Par le théorème de Hölder, il existe un élément $h_0 \in \Gamma^*$ et un intervalle $[a, b] \subset [u, v]$ tels que $\mathrm{Fix}(h_0) \cap [a, b] = \{a, b\}$ et tels qu'au moins l'un des points a ou b appartient à $]u, v[$. Par le lemme (5.2), pour tout $h \in \Gamma^*$ on a soit $h([a, b]) = [a, b]$, soit $h(]a, b[) \cap]a, b[= \emptyset$. Considérons la relation d'ordre $\prec$ sur la restriction de Γ^* à $[u, v]$ donnée par $h_1|_{[u,v]} \prec h_2|_{[u,v]}$ si $h_1(]a, b[)$ est à gauche de $h_2(]a, b[)$. Cette relation d'ordre est totale, bi-invariante et archimédienne. L'argument de la preuve du théorème de Hölder plus le lemme (3.2) et le fait que $[a, b]$ n'est pas une composante irréductible de Γ^* entraînent l'existence d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \Gamma^*|_{[u,v]} \longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow 0,$$

où G désigne le stabilisateur dans Γ^* de $[a, b]$. Soit $g \in \Gamma^*$ un élément tel que $g\mathrm{G}$ engendre $\Gamma^*|_{[u,v]}/\mathrm{G} \sim (\mathbb{Z}, +)$. Par définition, l'orbite par Γ^* de l'intervalle $[a, b]$ est égale à $\{g^i([a, b]) : i \in \mathbb{Z}\}$. Nous sommes donc sous les hypothèses du lemme (5.3), et la conclusion de ce lemme permet d'obtenir une contradiction. La preuve de la première partie de la proposition est donc terminée.

Pour finir la preuve complète de la proposition, montrons que la preuve de l'affirmation relative à un groupe Γ à croissance sous-exponentielle de difféomorphismes de la droite peut être obtenue à partir de celle concernant les difféomorphismes de l'intervalle. En effet, ceci est clair si Γ possède au moins un point fixe sur $\mathbb{R}$ (dans ce cas le groupe Γ est abélien). Considérons le cas contraire. Le groupe Γ étant à croissance sous-exponentielle, d'après le théorème de Plante cité plus haut, il existe une mesure de Radon ν sur $\mathbb{R}$ invariante par Γ. Si Γ n'a pas d'atome alors il est semiconjugué à un groupe de translations de la droite. Sinon, l'orbite de tout atome de ν est discrète. Quelque soit le cas, on démontre aisément que le groupe Γ' possède des points fixes sur la droite. Puisque tout sous-groupe de type fini de Γ' est à croissance sous-exponentielle, la première partie de la proposition entraîne qu'un tel sous-groupe doit être abélien. Le groupe Γ' est donc abélien, ce qui montre la métabélianité de Γ. Ceci achève la démonstration. $\square$

La proposition (5.1) n'est pas valable pour des groupes à croissance polynomiale de difféomorphismes de classe C^1 de l'intervalle. En effet, dans [11], B. Farb et J. Franks démontrent que $\mathrm{Diff}_+^1([0,1])$ contient tous les groupes nilpotents de type fini et sans torsion.

En ce qui concerne les groupes à croissance sous-exponentielle, rappelons d'abord qu'une question générale fut posée par J. Milnor dans [29]. Cette question consistait à savoir si tout groupe de type fini est à croissance soit polynomiale soit exponentielle. La réponse (négative) à cette question a été obtenue par R. Grigorchuk, qui a construit dans [16] un exemple d'un groupe de type fini à *croissance intermédiaire*. D'autres exemples de tels groupes apparaissent dans [17]. Le dernier d'entre eux, que nous désignérons par H, se trouve d'être de plus *ordonnable*, comme il fut démontré par la suite dans [19]. Il est donc réalisable comme un sous-groupe du groupe des homéomorphismes directs de la droite (voir [12]). Nous donnerons dans la suite une réalisation plus concrète de ce groupe, ce qui permettra de démontrer qu'il se plonge dans le groupe des homéomorphismes bilipchitziens de $[0,1]$. Nous ignorons si H peut être réalisé comme un groupe de difféomorphismes de classe C^1 de l'intervalle, et en général s'il existe des sous-groupes de $\mathrm{Diff}_+^1([0,1])$ à croissance intermédiaire.

Les exemples de groupes de torsion à croissance intermédiaire construits dans [16] et dans [17] sont obtenus comme des sous-groupes du groupe des isométries d'un arbre enraciné homogène (de valence finie). Nous montrerons que le groupe H considéré au §5 de [17] et dans [19] s'identifie de manière naturelle à un sous-groupe du groupe des isométries de l'arbre enraciné $\mathcal{T}_\infty$ dont la valence de chaque sommet est infinie (dénombrable).

Désignons par Ω l'espace $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, où $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$. Définissons l'application $a : \Omega \to \Omega$ par $a(x_1, x_2, \cdots) = (x_1 + 1, x_2, \cdots)$. Des applications b, c et d sont définies de manière récursive en utilisant la convention $(x_1, (x_2, x_3, \cdots)) = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$ et en posant

$$b(x_1, x_2, x_3, \cdots) = \begin{cases} (x_1, a(x_2, x_3, \cdots)), & x_1 \text{ pair} ; \\ (x_1, c(x_2, x_3, \cdots)), & x_1 \text{ impair} ; \end{cases}$$

$$c(x_1, x_2, x_3, \cdots) = \begin{cases} (x_1, a(x_2, x_3, \cdots)), & x_1 \text{ pair} ; \\ (x_1, d(x_2, x_3, \cdots)), & x_1 \text{ impair} ; \end{cases}$$

$$d(x_1, x_2, x_3, \cdots) = \begin{cases} (x_1, x_2, x_3, \cdots), & x_1 \text{ pair} ; \\ (x_1, b(x_2, x_3, \cdots)), & x_1 \text{ impair}. \end{cases}$$

Le groupe H engendré par a, b, c et d s'identifie de manière naturelle à un sous-groupe du groupe des isométries de $\mathcal{T}_\infty$. Il est facile de vérifier que ce groupe est isomorphe à celui considéré dans [19]. Le groupe H peut être pensé aussi comme un sous-groupe du groupe des homéomorphismes du bord à l'infini de $\mathcal{T}_\infty$. C'est en regardant cette action que nous réalisérons le groupe H d'abord comme un groupe *d'homéomorphismes* de l'intervalle $[0,1]$, puis comme un groupe *d'homéomorphismes bilipchitziens* de ce même intervalle.

Comme dans [17], considérons deux homomorphismes ϕ_0 et ϕ_1 du sous-groupe de H engendré par b, c et d vers H définis par

$$\phi_0(b) = a, \quad \phi_0(c) = a, \quad \phi_0(d) = id ;$$

$$\phi_1(b)=c, \quad \phi_1(c)=d, \quad \phi_1(d)=b.$$

Pour chaque n-uple finie $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{Z}^n$ choisissons un nombre $\ell_{x_1,\cdots,x_n}>0$ de sorte que

$$(5.6) \qquad \sum_{y_1\in\mathbb{Z}}\ell_{y_1}=1, \quad \sum_{y_n\in\mathbb{Z}}\ell_{x_1,\cdots,x_{n-1},y_n}=\ell_{x_1,\cdots,x_{n-1}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\sup_{x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{Z}}\ell_{x_1,\cdots,x_n}=0.$$

Posons

$$L_{x_1,\cdots,x_n}=L_{x_1,\cdots,x_{n-1}}+\sum_{y_n<x_n}\ell_{x_1,\cdots,x_{n-1},y_n},$$

et définissons l'intervalle $I_{x_1,\cdots,x_n}$ de longueur $\ell_{x_1,\cdots,x_n}$ par

$$I_{x_1,\cdots,x_n}=[L_{x_1,\cdots,x_{n-1},x_n},L_{x_1,\cdots,x_{n-1},1+x_n}].$$

Notons $\Delta=\cap_{n\in\mathbb{N}}\cup_{y_1,\cdots,y_n} int(I_{y_1,\cdots,y_n})$. Chaque point $p\in\Delta$ est codé par une unique suite $x_1,x_2,\cdots$, de sorte que $p=\cap_{n\geq1}I_{x_1,\cdots,x_n}$. Notons $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots$ la suite réduite modulo 2 correspondante. Soit n le premier entier positif (s'il existe) tel que $\phi_{\bar{x}_n}\circ\cdots\circ\phi_{\bar{x}_1}(b)$ est égal à id ou à a. Définissons $B(p)=p$ dans le premier cas, et dans le deuxième posons $B(p)=\cap_{k\geq1}I_{x_1,\cdots,x_{n-1},1+x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+k}}$. Ceci définit l'application B sur un sous-ensemble dense de Δ. Des applications C et D sont définies de manière analogue à partir des éléments c et d de H respectivement. Quant à l'élément $a\in$ H, pour $p=\cap_{n\geq1}I_{x_1,\cdots,x_n}$ posons simplement $A(p)=\cap_{n\geq1}I_{1+x_1,x_2,\cdots,x_n}$. Il est facile de montrer à partir de la troisième des propriétés (5.6) que les quatre applications A, B, C et D s'étendent continûment en des homéomorphismes de l'intervalle $[0,1]$ sur lui même. Le groupe H s'identifie ainsi à un groupe d'homéomorphismes directs de $[0,1]$.

Pour rendre ces homéomorphismes bilipchitziens il est clair qu'on doit choisir les valeurs des $\ell_{x_1,\cdots,x_n}$ de manière plus soigneuse. Supposons donc que ces suites satisfont (5.6) et que

$$(5.7) \qquad \lim_{|y_n|\to\infty}\sup_{y_{n+1},\cdots,y_{n+k}\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\ell_{x_1,\cdots,x_{n-1},1+y_n,y_{n+1},\cdots,y_{n+k}}}{\ell_{x_1,\cdots,x_{n-1},y_n,y_{n+1},\cdots,y_{n+k}}}-1\right|=0$$

pour tout $x_1,\cdots,x_{n-1}$,

$$(5.8) \qquad \text{et} \qquad \sup_{x_1,\cdots,x_{n-1},x_n,\cdots,x_{n+k}\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\ell_{x_1,\cdots,x_{n-1},1+x_n,x_{n+1}\cdots,x_{n+k}}}{\ell_{x_1,\cdots,x_{n-1},x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+k}}}-1\right|=M<\infty$$

(il est facile de vérifier l'existence de telles suites). Des applications A, B, C et D peuvent alors être définies de la même manière qu'on l'a fait auparavant. La preuve du fait que ces applications s'étendent en des homéomorphismes bilipchitziens de $[0,1]$ n'est pas compliquée. Nous en donnerons une démonstration indirecte qui montre que H peut être approché (en topologie C^0) par des groupes de difféomorphismes de classe C^1 de $[0,1]$. Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant, dû à J. C. Yoccoz (voir [11]), et dont nous ne donnons que le schéma de la preuve.

LEMME (5.9). *À chaque paire d'intervalles compactes I, J on peut associer un difféomorphisme direct $\psi(I,J)$ de I sur J de classe C^∞ de sorte que*

(i) *pour tout I,J,K on a $\psi(J,K)\circ\psi(I,J)=\psi(I,K)$,*
(ii) *si x est une extrémité de I alors $\psi(I,J)'(x)=1$,*

(iii) *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que si* $|1 - |I|/|J|| \leq \delta$ *alors* $\sup_{x \in I} |\psi(I,J)'(x) - 1| \leq \varepsilon$.

Schéma de la preuve. Pour $u > 0$ on considère le difféomorphisme $\psi_u :]0, \pi/u[\to \mathbb{R}$ défini par

$$\psi_u(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{t^2 + u^2}.$$

Si $a, b > 0$ alors on définit $\psi_{a,b} : [0, a] \to [0, b]$ par $\psi_{a,b}(0) = 0$, $\psi_{a,b}(a) = b$ et $\psi_{a,b}(x) = \psi_{\pi/b} \circ \psi_{\pi/a}^{-1}(x)$ pour $x \in]0, a[$. Finalement, on définit $\psi([a,b],[a',b'])(x) = \psi_{b-a,b'-a'}(x-a) + a'$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous allons définir des difféomorphismes A_n, B_n, C_n et D_n de classe C^1 de $[0,1]$ de sorte que les différentes suites de dérivées soient unifomément bornées et on ait la convergence (en topologie C^0) de A_n (resp. de B_n, C_n et D_n) vers A (resp. vers B, C et D). Nous allons donner la définition explicite pour B_n, les autres étant analogues. Fixons un point $p \in [0,1]$. Soit $x_1, \cdots, x_n$ une suite telle que $p \in I_{x_1,\cdots,x_n}$. De nouveau, notons $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$ la suite réduite modulo 2 correspondante. Il peut se présenter trois cas :

(i) $\phi_{\bar{x}_n} \circ \cdots \circ \phi_{\bar{x}_1}(b)$ est bien défini et égal à id : dans ce cas posons $B_n(p) = p$;

(ii) il existe un entier positif $k \leq n$ tel que $\phi_{\bar{x}_k} \circ \cdots \circ \phi_{\bar{x}_1}$ est défini sur b et $\phi_{\bar{x}_k} \circ \cdots \circ \phi_{\bar{x}_1}(b) = a$: dans ce cas définissons $B_n(p) = \psi(I_{x_1,\cdots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\cdots,x_n}, I_{x_1,\cdots,x_{k-1},1+x_k,x_{k+1},\cdots,x_n})(p)$;

(iii) $\phi_{\bar{x}_n} \circ \cdots \circ \phi_{\bar{x}_1}(b)$ est bien défini et différent de a et de id : dans ce cas posons $B_n(p) = p$.

La propriété (5.7) ainsi que celles des applications $\psi(I,J)$ montrent que A_n, B_n, C_n et D_n sont des difféomorphismes de classe C^1 de l'intervalle.[1] La propriété (5.8) montre que les dérivées de ces applications sont uniformément bornées par une constante $C(M)$. Puisque elles convergent en topologie C^0 vers A, B, C et D respectivement, ces dernières applications sont $C(M)$-lipchitziennes. Pour terminer la preuve du fait que H se réalise comme un groupe d'homéomorphismes bilipchitziens de $[0,1]$, on peut appliquer l'argument précédent aux inverses de ces applications. Remarquons finalement que la constante M (et donc $C(M)$) peut être choisie aussi proche de 1 que l'on veut.

Remarque (5.10). L'action de H sur l'intervalle est en quelque sorte «naturelle». Le théorème 6.8 de [12], le corollaire 1 de [24] et le lemme 9 de [26] permettent de justifier cette affirmation.

Remarque (5.11). L'élément a^2 appartient au centre du groupe H. Ainsi, pour démontrer que ce groupe ne se plonge pas dans $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$, ce n'est pas nécessaire d'utiliser la proposition (5.1) en toute sa puissance : il suffit d'appliquer directement le lemme de N. Kopell.

---

[1] Le groupe H_n engendré par A_n, B_n, C_n et D_n est un quotient de H : si l'on regarde l'action de H sur l'arbre enraciné $\mathcal{T}_\infty$, alors H_n s'identifie au quotient de H par le stabilisateur du niveau n de l'arbre.

6. Vers une classification générale

Commençons par donner la preuve du théorème (A). Elle sera faite bien sûr par récurrence sur α. Pour $\alpha = 1$ l'affirmation découle de la proposition (5.1). Supposons maintenant que l'affirmation soit valable pour des sous-groupes sous-exponentiellement moyennables de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ appartenant à SG_k, et soit Γ un sous-groupe sous-exponentiellement moyennable de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ appartenant à SG_{k+1}. La classe SG_{k+1} étant fermée par passage aux quotients, on peut supposer, sans perte de généralité, que Γ n'a pas de point fixe sur $]0,1[$.

Le groupe Γ ayant été obtenu par une opération d'extension, il existe un sous-groupe distingué G de Γ appartenant à SG_k tel que $\mathrm{H} = \Gamma/\mathrm{G}$ appartient à SG_1. Par l'hypothèse de récurrence, le groupe G est résoluble d'ordre de résolubilité $s \leq k$. Désignons par G^* le stabilisateur dans Γ des composantes irréductibles de G. C'est un sous-groupe distingué de Γ. De plus, à partir du théorème (B) on déduit aisément que G^* est résoluble d'ordre de résolubilité au plus égale à $s+1 \leq k+1$. En fait, son ordre de résolubilité est au plus $s \leq k$ lorsque $s \neq 1$.

PROPOSITION (6.1). *Le quotient Γ/G^* est soit trivial soit isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Dans ce dernier cas, un élément $f \in \Gamma$ engendre Γ/G^* si et seulement si pour toute composante irréductible $[a,b[$ de G^*, les intervalles $]a,b[$ et $f(]a,b[)$ sont disjoints et il n'y a pas de composante irréductible de G^* appartenant à l'orbite de $]a,b[$ par Γ entre ces deux intervalles.*

La preuve de cette proposition est analogue à celle de la proposition (5.1), mais techniquement un peu plus délicate. Elle sera faite en plusieurs étapes.

Affirmation 1 *:* soient $[a,b[$ une composante irréductible de G et f un élément quelconque de Γ qui ne fixe pas $[a,b[$; si u et v désignent les points fixes de f à gauche et à droite de $[a,b[$ respectivement, alors pour tout $g \in \Gamma$ on a soit $g([u,v]) = [u,v]$, soit $g(]u,v[) \cap]u,v[= \emptyset$.

Pour montrer cela, supposons le contraire et considérons le cas où il existe $g \in \Gamma$ tel que $g(u) \in]u,v[$, le cas où $g(v) \in]u,v[$ pour certain $g \in \Gamma$ étant analogue. Quitte à changer f par f^{-1}, on peut supposer que $f(x) < x$ pour tout $x \in]u,v[$. Reprenons les arguments de la preuve du lemme (5.2). Pour M et N suffisamment grands, il existe $d \in]u,v[$ tel que les applications gf^N et f^M vérifient $gf^N(x) > x$ pour tout $x \in]u,d[$, $gf^N(d) = d$ et $f^M(d) < g(u) = gf^N(u)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, l'intervalle $[a',b'] = f^n([a,b])$ est une composante irréductible de G contenue dans $]u,d[$. Une application du lemme du ping-pong de Klein montre que si h_1 et h_2 sont des mots distincts en des puissances positives de gf^N et f^M, alors $h_1([a',b']) \neq h_2([a',b'])$. Cela entraîne que $h_1\mathrm{G} \neq h_2\mathrm{G}$. Le semigroupe de Γ/G engendré par $gf^N\mathrm{G}$ et $f^M\mathrm{G}$ est donc libre, ce qui contredit le fait que $\mathrm{H} = \Gamma/\mathrm{G}$ appartient à SG_1.

Affirmation 2 *:* avec les notations de l'affirmation 1, on a $u = 0$ et $v = 1$.

Pour montrer cette affirmation, considérons indépendamment les deux possibilités qui peuvent se présenter.

Cas (i) *:* l'action du stabilisateur de $[u,v]$ dans Γ sur l'ensemble des composantes irréductibles de G contenues dans $[u,v]$ est libre.

Dans ce cas, en utilisant l'argument de la preuve du théorème de Hölder, on montre qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{G}^*_{[a,b]} \longrightarrow \Gamma^*_{[u,v]} \longrightarrow \mathrm{H}^* \subset (\mathbb{R},+) \longrightarrow 0,$$

où $\Gamma^*_{[u,v]}$ désigne la restriction à $[u,v]$ du stabilisateur de $[u,v]$ dans Γ et $\mathrm{G}^*_{[a,b]}$ désigne le stabilisateur de $[a,b]$ dans $\Gamma^*_{[u,v]}$. Soit $h \in \mathrm{G}^*_{[a,b]}$ tel que $h\mathrm{G}^*_{[a,b]}$ n'est pas trivial dans le quotient correspondant. Si $[u,v[\neq [0,1[$ alors il existe $g \in \Gamma$ tel que $g(]u,v[)$ est à gauche de $]u,v[$. En reprenant les arguments de la preuve du lemme (5.3) on constate que si h_1 et h_2 sont des mots en des puissances positives de g et h, alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $[a_{N-1}, b_{N-1}] = g^{N-1}([a,b])$ on a $h_1([a_{N-1}, b_{N-1}]) \neq h_2([a_{N-1}, b_{N-1}])$. Puisque $[a_{N-1}, b_{N-1}]$ est une composante irréductible de G, cela entraîne que le semigroupe de Γ/G engendré par gG et hG est libre, ce qui contredit le fait que $\mathrm{H} = \Gamma/\mathrm{G}$ appartient à SG_1.

Cas (ii) *:* l'action du stabilisateur de $[u,v]$ dans Γ sur l'ensemble des composantes irréductibles de G contenues dans $[u,v]$ n'est pas libre.

Fixons dans ce cas un élément $\bar{f} \in \Gamma$ tel qu'il existe un intervalle $[a',b'] \subset [u,v]$ qui contient des composantes irréductibles de G et pour lequel on a $\mathrm{Fix}(\bar{f}) \cap [a',b'] = \{a',b'\}$ et au moins l'un des points a' ou b' appartient à $]u,v[$. L'argument de la preuve de l'affirmation 1 montre que tout élément de G envoie $]a',b'[$ sur lui même ou sur un intervalle disjoint. On démontre ainsi qu'il existe $h \in \mathrm{G}$ tel que $h(]a',b'[) \cap]a',b'[= \emptyset$ et tel que l'orbite de $[a',b']$ par G est l'ensemble $\{h^i([a',b']) : i \in \mathbb{Z}\}$. Si l'on suppose $[u,v[\neq [0,1[$ alors en appliquant les arguments de la fin du cas (i) à l'intervalle $[a',b']$ on obtient une contradiction. Ceci finit la preuve de l'affirmation 2.

Puisque les affirmations 1 et 2 sont valables pour n'importe quelle composante irréductible $[a,b[$ de G, un élément de Γ est dans G^* si et seulement si cet élément fixe au moins une composante irréductible de G. Fixons une telle composante $[a,b[$ et définissons une relation d'ordre $\prec$ sur le groupe quotient Γ/G^* par $f_1\mathrm{G}^* \prec f_2\mathrm{G}^*$ lorsque $f_1(]a,b[)$ est à gauche de $f_2(]a,b[)$. Cette relation est totale, bi-invariante et archimédienne. L'argument de la preuve du théorème de Hölder montre alors qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{G}^* \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathrm{H}^* \subset (\mathbb{R},+) \longrightarrow 0.$$

Affirmation 3 *:* le groupe H^* est trivial ou infini cyclique.

En effet, dans le cas contraire le groupe Γ serait semiconjugué à un groupe de translations sans y être conjugué, contredisant le lemme (3.2).

Affirmation 4 *:* le groupe G^* agit trivialement sur le complément de la réunion des composantes irréductibles de G.

La preuve de ceci est analogue à celle de la preuve de l'affirmation 4 de la démonstration du théorème (B).

Finalement, on remarque aisément que les affirmations 1, 2, 3 et 4 entraînent la validité de la proposition (6.1).

Preuve du théorème (A). D'après la proposition précédente, le groupe dérivé $\Gamma' = [\Gamma, \Gamma]$ est contenu dans G^*, et Γ est donc résoluble. Si $s \neq 1$ alors l'ordre de résolubilité de Γ' est au plus égal à $s \leq k$, et ceci entraîne que l'ordre de résolubilité de Γ est au plus $s + 1 \leq k + 1$. Considérons maintenant le cas où $s = 1$. Le problème qui peut se présenter dans ce cas consiste en ce que le groupe G^* peut être métabélien et H^* infini cyclique. Plus précisément, le restriction de G^* à certaines de ses composantes irréductibles peut être conjuguée à l'action d'un groupe non abélien de transformations affines, de sorte que le groupe Γ soit une extension par $(\mathbb{Z}, +)$ d'un produit de groupes conjugués à des groupes de transformations affines dont au moins l'un des facteurs est non abélien. Or, dans ce cas, les arguments de la preuve de l'affirmation 3 dans la démonstration du théorème (A) de [34] montrent que le quotient Γ/G est un groupe résoluble d'ordre de résolubilité égal à 2. Ceci contredit évidemment le fait que Γ/G appartient à SG_1. La preuve du théorème (A) est achevée. □

La description complète des sous-groupes sous-exponentiellement moyennables de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ n'est pas si simple que celle des sous-groupes résolubles. Les exemples ci-dessous de sous-groupes de type fini de $\mathrm{Diff}_+^{\infty}([0,1])$ qui sont sous-exponentiellement moyennables et non résolubles montrent ce fait.

Exemple (6.2). Fixons d'abord deux suites de points (a_i) et (b_i) telles que $a_i < b_i$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, et telles que pour tout $i \geq 1$ l'intervalle $[a_i, b_i]$ soit contenu dans $]a_{i-1}, b_{i-1}[$. Pour $i \geq 0$ fixons un difféomorphisme $g_i : [a_i, b_i] \to [a_i, b_i]$ de sorte que $g_i(x) > x$ pour tout $x \in]a_i, b_i[$, $g_i(a_{i+1}) = b_{i+1}$, et tel que g_i soit infiniment tangent à l'identité aux extrémités. Étendons g_i à $[0, 1]$ en posant $g_i(x) = x$ pour $x \notin [a_i, b_i]$. Notons $f = g_0$, et définissons $g : [0,1] \to [0,1]$ par $g(x) = x$ si $x \in [0, a_1]$ et $g(x) = f^i g_{i+1} f^{-i}$ pour $x \in f^i([a_1, b_1])$, $i \geq 0$. Il est facile de voir que si les suites (a_i) et (b_i) ont été bien choisies (par exemple, si la valeur de $(b_{i+1} - a_{i+1})/(b_i - a_i)$ tend vers zéro à une vitesse hyper-exponentielle), alors g est un difféomorphisme de classe C^∞ de $[0, 1]$ infiniment tangent à l'identité aux extrémités.

Soit Γ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{\infty}([0,1])$ engendré par f et g. Remarquons que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le sous-groupe de Γ engendré par la famille d'éléments $\{f^{-n} g f^n, \cdots, g, \cdots, f^n g f^{-n}\}$ est résoluble d'ordre de résolubilité égal à $2n+1$. De plus, le sous-groupe G de Γ engendré par la famille $\{f^{-i} g f^i : i \in \mathbb{Z}\}$ est distingué dans Γ, et le quotient Γ/G s'identifie à $(\mathbb{Z}, +)$ (son générateur est fG). Ceci montre bien que Γ est sous-exponentiellement moyennable. D'autre part, Γ n'est pas résoluble, car il contient des sous-groupes résolubles d'ordre de résolubilité arbitrairement grand.

Exemple (6.3). Fixons des points a, b, c, d dans $]0, 1[$ de sorte que $0 < a < c < d < b < 1$. Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ de $[a, b]$ infiniment tangent à l'identité aux extrémités et tel que $f(c) = d$. Étendons f en un difféomorphisme de $[0, 1]$ en posant $f(x) = x$ pour $x \notin]a, b[$. Soit g un difféomorphisme de classe C^∞ de $[0, 1]$ infiniment tangent à l'identité aux extrémités, avec un unique point fixe à l'intérieur, et tel que $g(c) = a$ et $g(d) = b$.

Désignons par Γ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^\infty([0,1])$ engendré par f et g. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ le sous-groupe Γ_n de Γ engendré par $\{f_i = g^{-i} f g^i : |i| \leq n\}$ est résoluble d'ordre de résolubilité égal à $2n+1$. De plus, le sous-groupe $\mathrm{G} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ est distingé dans Γ, et le quotient Γ/G est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ (son générateur est $g\mathrm{G}$). Le groupe Γ est donc de type fini, sous-exponentiellement moyennable et non résoluble.

Remarque (6.4). Il n'est pas difficile de modifier les exemples précédents pour ainsi obtenir des sous-groupes de $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ vérifiant des propriétés analogues à celles des groupes y construits.

Le plus intéressant des exemples précédents est sans doute le deuxième, car on y voit aparaître de manière claire un phénomène interdit aux groupes résolubles. Plus concrétement, si l'on désigne par $\mathcal{R}(\infty)$ la famille de groupes qui sont des réunions directes de groupes dans $r(i)$, avec $i \in \mathbb{N}$, alors le normalisateur d'un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ appartenant à $\mathcal{R}(\infty)$ et sans point fixe à l'intérieur de $[0,1]$ n'appartient pas forcément à $\mathcal{R}(\infty)$ (ce fait est à comparer avec le théorème (B)). On peut néanmoins décrire de manière explicite la structure de ce normalisateur dans des cas où la dynamique du groupe en question est relativement simple. Pour cette description nous aurons cependant besoin de quelques notations.

Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ sans point fixe à l'intérieur qui est une réunion directe d'une famille dénombrable de groupes résolubles. Pour chaque sous-groupe résoluble non trivial G de Γ notons $k(\mathrm{G})$ son ordre de résolubilité. Désignons par $\mathcal{F}$ la famille des sous-intervalles $[u,v]$ de $[0,1]$ qui sont des composantes irréductibles d'au moins l'un des $\mathrm{G}_i^{\mathrm{sol}}$, où $i \in \{1,\cdots,k(\mathrm{G})\}$, et définissons $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{[0,1]\}$. Supposons que pour tout $[u,v] \in \mathcal{F}$ il existe un unique intervalle $[\bar{u},\bar{v}] \in \hat{\mathcal{F}}$ tel que $[u,v] \subset]\bar{u},\bar{v}[$ et tel qu'il n'existe aucun $[u',v'] \in \mathcal{F}$ vérifiant $[u,v] \subset]u',v'[$ et $[u',v'] \subset]\bar{u},\bar{v}[$ (ce n'est pas toujours le cas : voir l'exemple (6.6) à la fin du paragraphe). La description dynamique des groupes résolubles du chapitre 2 montre dans ce cas qu'il existe $f = f_{[\bar{u},\bar{v}]} \in \Gamma$ tel que $f([\bar{u},\bar{v}]) = [\bar{u},\bar{v}]$, tel que $f(x) < x$ pour tout $x \in]\bar{u},\bar{v}[$, et tel que les intervalles de $\mathcal{F}$ contenus dans $[\bar{u},\bar{v}]$ et qui sont dans l'orbite de $[u,v]$ par Γ sont ceux de la forme $f^n([u,v])$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Sur $\mathcal{F}$ considérons la relation d'équivalence $\sim$ qui identifie deux intervalles $[u,v]$ et $[u',v']$ s'il existe deux suites finies $[u_1,v_1],\cdots,[u_n,v_n]$ et $[u_1',v_1'],\cdots,[u_n',v_n']$ dans $\mathcal{F}$ telles que $[u_1,v_1] = [u,v]$, $[u_1',v_1'] = [u',v']$, $[u_n,v_n] = [u_n',v_n']$, $[\bar{u}_i,\bar{v}_i] = [u_{i+1},v_{i+1}]$ et $[\bar{u'}_i',\bar{v}_i'] = [u_{i+1}',v_{i+1}']$ pour tout $i \in \{1,\cdots,n-1\}$.

Fixons d'une fois pour toutes une composante irréductible $[a_0,b_0]$ d'un sous-groupe résoluble et non trivial de Γ. Pour $i \geq 1$ définissons par récurrence $[a_{i+1},b_{i+1}] = [\bar{a}_i,\bar{b}_i]$. Pour $i < 0$ fixons des intervalles $[a_i,b_i]$ de sorte que $[a_i,b_i] = [\bar{a}_{i-1},\bar{b}_{i-1}]$. Puisque Γ n'a pas de point fixe à l'intérieur, on a $\lim_{i\to+\infty} a_i = 0$ et $\lim_{i\to+\infty} b_i = 1$. Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ notons $\mathcal{F}_i$ la classe d'équivalence de $[u_i,v_i]$ par la relation $\sim$. La famille $\mathcal{F}$ est la réunion disjointe des $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{Z}$.

Désignons par $\mathcal{N}(\Gamma)$ le normalisateur de Γ dans $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$, et par Γ^* le sous-groupe de $\mathcal{N}(\Gamma)$ constitué des éléments f tels que si $[u,v] \in \mathcal{F}_i$ et $f([u,v]) \in \mathcal{F}_j$, alors $i = j$. Le groupe Γ^* appartient encore à $\mathcal{R}(\infty)$. De plus, il vérifie lui aussi la propriété dynamique supposée pour le groupe Γ. Pour démontrer ces faits on peut utiliser des arguments analogues à ceux de la preuve du théorème (B).

PROPOSITION (6.5). *Le groupe Γ^* est distingué dans $\mathcal{N}(\Gamma)$, et le quotient $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma^*$ est soit trivial soit isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.*

Preuve. Considérons les familles $\mathcal{F}^*$, $\hat{\mathcal{F}}^*$ et $\mathcal{F}_i^*$ associées au groupe Γ^*, et fixons $g \in \mathcal{N}(\Gamma)$. Si $[u, v]$ appartient à $\mathcal{F}$ alors il existe un sous-groupe résoluble G de Γ tel que $[u, v]$ est une composante irréductible de l'un des $\mathrm{G}_i^{\mathrm{sol}}$, avec $i \in \{1, \cdots, k(\mathrm{G})\}$. Le groupe $g\mathrm{G}g^{-1}$ étant encore résoluble et contenu dans Γ, on déduit par définition que l'intervalle $g([u, v])$ appartient lui aussi à $\mathcal{F}^*$.

Il n'est pas difficile de se convaincre que si $g \in \mathcal{N}(\Gamma)$, si $[u, v] \in \mathcal{F}_i^*$ et si $g([u, v]) \in \mathcal{F}_j^*$, alors la différence $j-i$ ne dépend que de g. On obtient ainsi une application bien définie $\phi : \mathcal{N}(\Gamma) \to (\mathbb{Z}, +)$. Cette application est de plus un morphisme de groupes, car si $g, h \in \mathcal{N}(\Gamma)$ et $[u, v] \in \mathcal{F}^*$ satisfont $[u, v] \in \mathcal{F}_i^*$, $g([u, v]) \in \mathcal{F}_j^*$ et $hg([u, v]) \in \mathcal{F}_k^*$, alors $\phi(g) = j-i$, $\phi(h) = k-j$, $\phi(hg) = k-i$, et donc $\phi(hg) = \phi(h) + \phi(g)$. Finalement, le noyau du morphisme ϕ étant par définition égal à Γ^*, ceci finit la preuve de la proposition. $\square$

Malgré la proposition précédente, il faut remarquer qu'en général la dynamique d'un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$ sans point fixe à l'intérieur et appartenant à $\mathcal{R}(\infty)$ peut être plus compliquée que celle qui a été considérée précédemment. Par ailleurs, des phénomènes encore plus compliqués peuvent se produire pour des sous-groupes de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$ appartenant à SG_α lorsque α est un ordinal limite «très grand».

Exemple (6.6). Étendons les générateurs f et g du groupe Γ de l'exemple (6.3) en des difféomorphismes de classe C^∞ de $[-1, 2]$ comme étant l'identité en dehors de l'intervalle $[0, 1]$. Fixons une collection de points $-1 < \bar{a} < \bar{c} < 0 < 1 < \bar{d} < \bar{b} < 2$. Considérons un difféomorphisme $\bar{f}$ de $[\bar{a}, \bar{b}]$ infiniment tangent à l'identité aux extrémités et tel que $\bar{f}(\bar{c}) = \bar{d}$. Étendons $\bar{f}$ en un difféomorphisme de classe C^∞ de $[-1, 2]$ en posant $\bar{f}(x) = x$ pour $x \in [-1, \bar{a}] \cup [\bar{b}, 1]$. Fixons un autre difféomorphisme $\bar{g}$ de classe C^∞ de $[-1, 2]$ tel que $\bar{g}(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$, $\bar{g}(\bar{c}) = \bar{a}$, $\bar{g}(\bar{d}) = \bar{b}$ et $\bar{g}(x) \neq x$ pour $x \in]-1, 0[\cup]1, 2[$. Il est facile de voir que le sous-groupe $\bar{\Gamma}$ de $\mathrm{Diff}_+^\infty([-1, 2])$ engendré par $f, g, \bar{f}$ et $\bar{g}$ est sous-exponentiellement moyennable. Cependant, son «architecture» est clairement plus compliquée que celle du groupe Γ. Remarquons finalement que $\bar{\Gamma}$ appartient à $\mathcal{R}(\infty)$. En effet, en notant $f_i = g^{-i}fg^i$, $\bar{f}_i = \bar{g}^{-i}\bar{f}\bar{g}^i$, où $i \in \mathbb{Z}$, et en considérant le sous-groupe Γ_n de $\bar{\Gamma}$ engendré par $\{f_i, \bar{f}_j : |i| \leq n, |j| \leq n\}$, on voit aisément que Γ_n est résoluble et appartient à $r(4n+2)$, et que $\bar{\Gamma}$ est la réunion des Γ_n, $n \in \mathbb{N}$.

Signalons cependant que les arguments de la preuve du théorème (B) montrent que si Γ est un sous-groupe sous-exponentiellement moyennable de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$ sans point fixe à l'intérieur qui a été obtenu par une extension

$$0 \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow 0$$

de sorte que G possède des points fixes et $H \in SG_1$, alors H possède un quotient isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Plus précisement, si l'on désigne par G^* le sous-groupe de Γ constitué des éléments qui fixent les composantes irréductibles de G, alors on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow G^* \longrightarrow \Gamma \longrightarrow (\mathbb{Z},+) \longrightarrow 0,$$

le morphisme de Γ sur $(\mathbb{Z},+)$ étant induit par le décalage des composantes irréductibles de G. À partir de ce fait, et en donnant une version générale de la proposition (6.5), il est envisageable de décrire de manière complète la dynamique des sous-groupes sous-exponentiellement moyennables de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$. Une telle description devrait entraîner par exemple que tout sous-groupe sous-exponentiellement moyennable de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ est en fait élémentairement moyennable. Ce serait une sorte de généralisation de la proposition (5.1) (remarquons que d'après [8], le groupe H considéré au §5 n'est pas élémentairement moyennable). On devrait pouvoir démontrer aussi que si Γ est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ qui est sous-exponentiellement moyennable et non topologiquement conjugué à un sous-groupe du groupe affine, alors son action diagonale sur l'espace $\{(a,b) \in]0,1[\times]0,1[: a < b\}$ possède des orbites non partout denses. L'idée consiste en ce que si Γ appartient à SG_α et si $[a,b]$ est une composante irréductible de l'un des sous-groupes de Γ appartenant à SG_β pour $\beta < \alpha$ qui apparaissent dans la construction de Γ en tant que groupe sous-exponentiellement moyennable, alors pour tout $g \in \Gamma$ soit les intervalles $]a,b[$ et $g(]a,b[)$ sont disjoints, soit l'un contient l'autre. On verrait réapparaître ainsi par une méthode dynamique un résultat algébrique déjà connu : le groupe F de Thompson n'est pas sous-exponentiellement moyennable (le lemme 2.1 de [3] permet de montrer que les orbites par F dans l'espace introduit ci-dessus sont denses).

7. Appendice : homéomorphismes affines par morceaux

Considérons le groupe $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ des homéomorphismes directs et affines par morceaux de l'intervalle (par définition, pour chaque $f \in \mathrm{Afm}_+([0,1])$ le nombre de points de discontinuité de la dérivée de f sur $[0,1]$ est fini). L'intérêt porté à ce groupe est dû principalement au fait qu'il ne contient pas de sous-groupe libre à deux générateurs (voir [4]), et il est non trivial de déterminer quels sont ses sous-groupes moyennables. Le plus remarquable des sous-groupes de $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ est sans doute le groupe F de Thompson, car il est, parmi d'autres propriétés, de présentation finie (voir [7]).

De manière un peu plus générale, désignons par $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$ le groupe des homéomorphismes directs et affines par morceaux de $[0,1]$ dont les dérivées n'ont qu'un nombre fini de points de discontinuité sur tout intervalle compact $[0,a]$ contenu dans $[0,1[$. Bien que si un élément de $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$ n'est pas trivial alors il n'est pas un difféomorphisme, la variation du logarithme de sa dérivée sur tout intervalle compact $[0,a] \subset [0,1[$ est bien définie et finie. De plus, la dérivée à droite de cet élément est aussi bien définie sur tout point de $[0,1[$. À partir de ces faits on constate aisément que les résultats de ce travail (ainsi que ceux de [34]) s'étendent aux sous-groupes de $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$. En fait, on peut simplifier énormément les arguments de démonstration dans ce contexte.

Pour cela, il suffit de remarquer que pour tout élément f de $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ (resp. de $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$), s'il existe une suite de points fixes distincts de f convergeant vers un point de $[0,1]$ (resp. de $[0,1[$), alors tous sauf éventuellement un nombre fini de points de cette suite sont contenus dans un intervalle sur lequel la restriction de f est l'identité.

Il faut néanmoins ajouter une autre propriété : aucun sous-groupe de $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$ ne peut être conjugué à un sous-groupe non commutatif du groupe affine. La preuve de ceci est faite par contradiction. Supposons que Γ soit un exemple d'un tel sous-groupe. Choisissons $f \in \Gamma$ avec un seul point fixe sur $]0,1[$, et désignons par p ce point. Il existe $h \in \Gamma$ qui ne fixe pas p. L'élément $g = hfh^{-1}$ possède un unique point fixe sur $]0,1[$, à savoir $h(p)$. Les éléments f et g ne commutent pas, car ses points fixes sont différents. Donc, l'élement $[f,g] = fgf^{-1}g^{-1}$ n'est pas l'identité. Cependant, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $fgf^{-1}g^{-1}(x) = x$ pour tout $x \in [0,\varepsilon]$. Or, ceci est imposible si Γ est conjugué à un sous-groupe du groupe affine.

Désignons par $r'(1) = r''(1)$ la famille de groupes qui sont topologiquement conjugués à des groupes de translations non triviaux, et pour $k \geq 2$ désignons par $r'(k)$ (resp. $r''(k)$) la classe des groupes qui sont des produits semidirects entre $(\mathbb{Z},+)$ et un sous-groupe d'une *somme directe* d'une famille au plus dénombrable (resp. au plus finie) de groupes appartenant aux $r'(i)$ (resp. aux $r''(i)$), avec $i < k$. D'après ce qui précède, tout sous-groupe résoluble de $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$ sans point fixe à l'intérieur appartient à $r'(k)$ pour certain $k \in \mathbb{N}$. Le cas des sous-groupes de type fini de $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ est un peu plus intéressant.

PROPOSITION (7.1). *Tout sous-groupe résoluble et de type fini de* $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ *sans point fixe à l'intérieur et dont l'ordre de résolubilité est égal à k appartient à $r''(k)$.*

Preuve. Nous donnons une démonstration par récurrence. Dans le cas où $k = 1$ on peut appliquer les remarques précédentes. Supposons désormais que l'affirmation de la proposition soit satisfaite pour des indices $i < k$ et fixons un sous-groupe résoluble Γ de $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ sans point fixe à l'intérieur et d'ordre de résolubilité égal à k. Par rapport aux notations introduites au §4, on doit démontrer que la que la restriction de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ à l'intervalle $[f_k(v_{k-1}), v_{k-1}[$ est de type fini. Pour cela, fixons une famille génératrice $\{g_1, \cdots, g_n\}$ de Γ. Chaque g_i s'exprime sous la forme $f_k^{n_i} h_i$, où h_i appartient à $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ et $n_i \in \mathbb{Z}$. Puisque chaque h_i appartient à $\mathrm{Afm}_+([0,1])$, il existe un entier positif $N(i)$ tel que si $|n| \geq N(i)$ alors la restriction de $f_k^{-n} h_i f_k^n$ à l'intervalle $[f_k(v_{k-1}), v_{k-1}[$ est l'identité. En posant $N = \max\{N(i) : 1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}\}$, on voit que la restriction de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ à $[f_k(v_{k-1}), v_{k-1}[$ est engendrée par les restrictions correspondantes des éléments $f_k^{-n} h_i f_k^n$, où $n \in \mathbb{Z}, |n| \leq N$ et $i \in \{1, \cdots, k\}$. La famille constituée de ces éléments étant finie, ceci achève la démonstration de la proposition. $\square$

La classification complète des groupes groupes sous-exponentiellement moyennables d'homéomorphismes affines par morceaux de l'intervalle devrait être plus simple que celle des groupes de difféomorphismes de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$. De plus, si l'on tient en compte les résultats de [2], il est très probablement vrai (et pas trop difficile à démontrer) que si un sous-groupe de $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ ne contient pas de sous-groupe isomorphe à F, alors il est sous-exponentiellement (ou plutôt élémentairement) moyennable.

Received January 08, 2004

Final version received May 19, 2004

UNITÉ DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON, UMR 5669 DU CNRS
46 ALLÉE D'ITALIE, F-69364 LYON 07
FRANCE
anavas@umpa.ens-lyon.fr

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
LAS PALMERAS 3425
ÑUÑOA, SANTIAGO, CHILE
andnavas@uchile.cl

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BASS, *The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups*, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), 603–614.

[2] M. BRIN, *The ubiquity of Thompson's group F in groups of piecewise linear homeomorphisms of the unit interval*, J. London Math. Soc. **60** (1999), 449–460.

[3] M. BRIN, *The chameleon group groups of Richard J. Thompson: automorphisms and dynamics*, Publ. Math. de l'IHES **84** (1996), 5–33.

[4] M. BRIN & C. SQUIER, *Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line*, Invent. Math. **79** (1985), 485–498.

[5] L. BURSLER & A. WILKINSON, Global rigidity of solvable group actions on S^1, Prépublication (2003).

[6] A. CANDEL & L. CONLON, Foliations I, Grad. Stud. in Math. **23** Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[7] J. CANNON, W. FLOYD & W. PARRY, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, L'Enseignement Mathématique **42** (1996), 215–256.

[8] C. CHOU, *Elementary amenable groups*, Illinois J. Math. **24** (1980), 396–407.

[9] S. COHEN & A. GLASS, *Free groups from fields*, J. London Math. Soc. **55** (1997), 309–319.

[10] A. DYUBINA, *Instability of the virtual solvability and the property of being virtually torsion-free for quasi-isometric groups*, Internat. Math. Res. Notices **21** (2000), 1097–1101.

[11] B. FARB & J. FRANKS, *Groups of homeomorphisms of one-manifolds III: Nilpotent subgroups*, À paraître dans Erg. Theory and Dynamical Systems.

[12] É. GHYS, *Groups acting on the circle*, L'Enseignement Mathématique **47** (2001), 329–407.

[13] É. GHYS. *Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité*, Bol. Soc. Brasileira Mat. **24** (1993), 137–178.

[14] É. GHYS & P. DE LA HARPE, Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, Progr. Math. **83**, Birkhäuser, Boston 1990.

[15] É. GHYS & V. SERGIESCU, *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle*, Comment. Math. Helvetici **62** (1987), 185–239.

[16] R. GRIGORCHUK, *Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means*, Izv. Akad. Nauka **48** (1984), 939–985.

[17] R. GRIGORCHUK, *On degrees of growth of p-groups and torsion-free groups*, Mat. Sbornik **126** (1985), 194–214.

[18] R. GRIGORCHUK, *An example of a finitely presented amenable group that does not belong to the class* EG, Mat. Sbonnik **189** (1998), 79–100.

[19] R. GRIGORCHUK & A. MAKI, *On a group of intermediate growth that acts on a line by homeomorphisms*, M. Zametki **53** (1993), 46–63. Traduction à l'anglais dans Math. Notes **53** (1993), 146–157.

[20] R. GRIGORCHUK & A. ŻUK, *On a torsion-free weakly branch group defined by a three state automaton*, Int. J. of Algebra and Computation **12** (2002), 223–246.

[21] M. GROMOV, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. Math. de l'IHES **53** (1981), 53–73.

[22] P. DE LA HARPE, Topics in geometric group theory, Univ. of Chicago Press 2000.

[23] P. JOLISSAINT, *Moyennabilité intérieure du groupe* F *de Thompson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), 61–64.

[24] P. KROPHOLLER, *Amenability and right orderable groups*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 347–352.

[25] P. LINNELL, *Left ordered groups with no non-abelian free subgroups*, J. Group Theory **4** (2001), 153–168.

[26] P. LONGOBARDI, M. MAJ & A. RHEMTULLA, *When is a right orderable group locally indicable?*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 637–641.

[27] P. LONGOBARDI, M. MAJ & A. RHEMTULLA, *Groups with no free subsemigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 1419–1427.

[28] G. MARGULIS, *Free subgroups of the homeomorphism group of the circle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), 669–674.

[29] J. MILNOR, *Problem 5603*, American Math. Monthly **75** (1968), 685–686.

[30] J. MILNOR, *Growth of finitely generated solvable groups*, J. Diff. Geometry **2** (1968), 447–449.

[31] J. MILNOR, *A note on curvature and fundamental group*, J. Diff. Geometry **2** (1968), 1–7.

[32] I. NAKAI, *Separatrices for non solvable dynamics on* $\mathbb{C}, 0$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **44** (1994), 569–599.

[33] A. NAVAS, Groupes de difféomorphismes du cercle. Thèse de doctorat, Lyon (2003).

[34] A. NAVAS, *Groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle, du cercle et de la droite*, À paraître dans Bull. Brazilian Math. Soc.

[35] A. NAVAS, *Sur les groupes de difféomorphismes du cercle engendrés par des éléments proches des rotations*, À paraître dans L'Enseignement Mathématique.

[36] A. NAVAS, *Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle*, Ann. Sci. de l'ENS **35** (2002), 749–758.

[37] A. OLSHANSKII & A. STOROZHEV, *A group variety defined by a semigroup law*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **60** (1996), 255–259.

[38] D. OSIN, *Elementary classes of groups*, Mat. Zametki **72** (2002), 84-93. Traduction à l'anglais à paraître dans Math. Notes.

[39] J. PLANTE, *Subgroups of continuous groups acting differentiably on the half line*, Ann. de l'Institut Fourier (Grenoble) **34** (1984), 47–56.

[40] J. PLANTE, *Foliations with measure preserving holonomy*, Annals of Maths **102** (1975), 327–361.

[41] J. PLANTE & W. THURSTON, *Polynomial growth in holonomy groups of foliations*, Comment. Math. Helvetici **51** (1976), 567–584.

[42] A. RHEMTULLA & D. ROLFSEL, *Local indicability in ordered groups: braids and elementary amenable groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2569–2577.

[43] J. ROSENBLATT, *Invariant measures and growth conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. **197** (1974), 33–53.

[44] A. ŠVARC, *A volume invariant of coverings*, Dokl. Akad. Nauka SSSR **105** (1955), 32–34.

[45] W. THURSTON, *A generalization of Reeb stability theorem*, Topology **13** (1974), 347–352.

[46] J. TITS, *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra **20** (1972), 250–270.

[47] S. WHITE, *The group generated by* $x \mapsto x+1$ *and* $x \mapsto x^p$ *is free*, J. Algebra **118** (1988), 408–422.

[48] J. WOLF, *Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemanniann manifolds*, J. Diff. Geometry **2** (1968), 421–446.

[49] J. C. YOCCOZ, *Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle. Petits diviseurs en dimension 1*, Astérisque **231** (1995), 89–242.