

# Sur les groupes de difféomorphismes du cercle engendrés par des éléments proches des rotations

ANDRÉS NAVAS

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées  
École Normale Supérieure de Lyon, UMR 5669 du CNRS  
46 allée d'Italie, F-69364 Lyon 07, France  
e-mail: anavas@umpa.ens-lyon.fr

## Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Quelques faits classiques</b>	<b>5</b>
<b>2 Une application de retour dilatante : les lemmes de Duminy</b>	<b>8</b>
<b>3 Non existence de minimal exceptionnel</b>	<b>12</b>
3.1 En classe $C^{\log}$ : le théorème B . . . . .	12
3.2 En classe $C^2$ : le théorème A . . . . .	14
3.3 En classe $C^\omega$ : le théorème C . . . . .	15
3.4 Une idée pour le cas général . . . . .	17
3.5 Quelques exemples . . . . .	18
<b>4 Ergodicité</b>	<b>22</b>
4.1 Deux critères généraux . . . . .	22
4.2 Preuve de l'ergodicité . . . . .	26
<b>5 Rigidité</b>	<b>27</b>
<b>6 Appendice</b>	<b>29</b>
6.1 Groupes libres d'homéomorphismes du cercle : un théorème de Margulis . . . . .	29
6.2 Un théorème de conjugaison différentiable . . . . .	31

## Introduction

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe du groupe  $\text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$  des homéomorphismes directs du cercle. Un sous-ensemble  $K$  de  $\mathbb{S}^1$  est *invariant* par  $\Gamma$  si  $f(x)$  appartient à  $K$  pour tout  $x \in K$  et tout  $f \in \Gamma$ . Un ensemble compact non vide et invariant  $K$  est *minimal* si les seuls sous-ensembles fermés invariants de  $K$  sont l'ensemble vide et  $K$ . Il est bien connu qu'on a toujours une (et seulement une) des possibilités suivantes (voir le §1 pour la preuve) :

(a) il y a (au moins) une orbite finie ;

(b) toutes les orbites sont denses ;

(c) il existe un ensemble fermé invariant minimal homéomorphe à l'ensemble de Cantor ; cet ensemble est unique et il est contenu dans l'adhérence de toute orbite. On l'appelle un *minimal exceptionnel*.

Lorsque le groupe  $\Gamma$  est cyclique infini et lorsque son générateur a une certaine régularité (par exemple, il est de classe  $C^2$ ), le cas (c) ci-dessus ne peut pas se produire : c'est essentiellement le théorème de Denjoy. Cependant, des ensembles de Cantor minimaux peuvent apparaître pour des sous-groupes non cycliques de difféomorphismes de  $\mathbb{S}^1$  de classe  $C^\infty$  ou même analytiques réels. Quelques exemples apparaissent de manière naturelle dans l'étude des groupes fuchsien. Un autre exemple intéressant est construit dans [12]. Dans [28] le lecteur trouvera un exemple d'intérêt historique, et nous en étudierons d'autres au §3.4.

L'un des objectifs de ce travail est d'expliciter quelques restrictions à l'existence de minimaux exceptionnels pour des groupes agissant sur le cercle par difféomorphismes de classe  $C^2$ . Par exemple, un théorème classique de R. Sacksteder fournit la contrainte suivante : s'il existe un Cantor minimal et si le groupe est de type fini, alors il existe un élément avec un point fixe hyperbolique (voir [29]). Il y a aussi une contrainte de type algébrique : sous les hypothèses précédentes, le groupe contient un sous-groupe libre à deux générateurs (voir le premier appendice).

Nous nous intéressons plutôt à des propriétés reliées aux générateurs du groupe. Nous montrerons que si les générateurs satisfont certaines conditions, alors il ne peut pas y avoir de minimal exceptionnel. De plus, nous étudierons dans ce cas des propriétés dynamiques.

Avant d'être plus précis, citons d'abord un exemple. Dans la théorie des groupes fuchsien on démontre, en utilisant l'inégalité de Jörgensen, que si un sous-groupe discret à deux générateurs de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  admet un minimal exceptionnel, alors le déplacement de l'un des générateurs est "grand". Cela signifie qu'il est impossible de conjuguer simultanément dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  les deux générateurs d'un tel groupe en des éléments "proches des rotations" (voir [2], pages 105 et 321). Le premier but de ce travail est de donner une preuve complète d'une extension de ce résultat à des groupes engendrés par des éléments proches des rotations dans le groupe  $\text{Diff}_+^2(\mathbb{S}^1)$  des difféomorphismes directs et de classe  $C^2$  du cercle. Le théorème suivant a été originalement démontré par G. Duminy aux environs de 1977. Cependant, à notre connaissance, aucune preuve n'en a été publiée.

**Théorème A [G. Duminy].** *Il existe une constante  $\delta_0 > 0$  telle que, si  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Diff}_+^2(\mathbb{S}^1)$  engendré par un ensemble  $\Gamma^1$  (pas nécessairement fini) de difféomorphismes, dont au moins l'un d'entre eux a un nombre fini de points périodiques, et tels que  $|f''(x)| \leq \delta_0$  pour tout  $f \in \Gamma^1$  et tout  $x \in \mathbb{S}^1$ , alors  $\Gamma$  n'admet pas de minimal exceptionnel.*

Ce théorème reste valable pour des sous-groupes du groupe  $\text{Diff}_+^{\log}(\mathbb{S}^1)$  des difféomorphismes directs du cercle dont la variation totale du logarithme de la dérivée est finie. En fait, le théorème A découle presque directement du résultat suivant.

**Théorème B.** *Il existe une constante  $\lambda_0 > 0$  telle que, si  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Diff}_+^{\log}(\mathbb{S}^1)$  engendré par un ensemble  $\Gamma^1$  de difféomorphismes, dont au moins l'un d'entre eux a un nombre fini de points périodiques, et tels que  $\text{var}(\log(f')) \leq \lambda_0$  pour tout  $f \in \Gamma^1$ , alors  $\Gamma$  n'admet pas de minimal exceptionnel.*

Les points périodiques des difféomorphismes “génériques” sont isolés (voir [22]). Il est donc raisonnable d'espérer que les théorèmes A et B soient encore valables sans l'hypothèse d'un nombre fini de points périodiques pour l'un des générateurs. Cependant, dans l'étude du cas général on trouve des problèmes de nature combinatoire. Nous reviendrons plus loin sur cette question. Signalons pour le moment que dans le cadre des difféomorphismes analytiques réels du cercle on peut résoudre aisément ces difficultés, ce qui permet d'établir le résultat suivant.

**Théorème C.** *Il existe une constante  $\lambda_1 > 0$  telle que, si  $\Gamma$  est un sous-groupe du groupe des difféomorphismes directs et analytiques réels du cercle qui est engendré par un ensemble  $\Gamma^1$  d'éléments satisfaisant  $\text{var}(\log(f')) \leq \lambda_1$  pour tout  $f \in \Gamma^1$ , alors  $\Gamma$  n'admet pas de minimal exceptionnel.*

Les conditions  $\|f''\| = \sup_{x \in \mathbb{S}^1} |f''(x)| \leq \delta_0$  ou  $\text{var}(\log(f')) \leq \lambda_0$  expriment que les applications  $f \in \Gamma^1$  sont proches des rotations. En effet, on a  $\|f''\| = 0$  ou  $\text{var}(\log(f')) = 0$  si et seulement si  $f$  est une rotation. De plus, on montre aisément que

$$\sup_{x \in \mathbb{S}^1} \left| f(x) - (x + \rho(f)) \right| \leq 1 - e^{-\text{var}(\log(f'))}, \quad (1)$$

où  $\rho(f)$  est le nombre de rotation de  $f$  (voir le §1).

Pour un groupe de rotations du cercle, ou bien toutes les orbites sont finies ou bien toutes les orbites sont denses et son action est ergodique (par rapport à la mesure de Lebesgue). On peut donc considérer les théorèmes A et B comme étant des résultats de stabilité topologique par des perturbations petites (au sens  $C^2$ ). En ce qui concerne les constantes qui apparaissent dans les énoncés, nous montrons que  $\lambda_0 = \log(1.22074) \sim 0.199$  suffit pour le théorème B, que  $\delta_0 = \lambda_0/(1 + \lambda_0) \sim 0.165$  suffit pour le théorème A, et que  $\lambda_1 = \lambda_0/4$  suffit pour le théorème C. Bien que les valeurs optimales semblent difficiles à déterminer, nous montrons que la constante  $\lambda_0$  ne peut pas être plus grande que  $4 \log((\sqrt{5} + 1)/2)$ . Il serait peut être intéressant de trouver la meilleure constante du théorème C restreint aux sous-groupes de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Comme nous l'avons indiqué plus haut, la preuve du théorème de Duminy n'a pas été publiée. Néanmoins, on dispose de résultats plus précis pour des groupes de type fini engendrés par des éléments proches de l'identité dans le groupe  $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$  des difféomorphismes analytiques réels et directs du cercle. En effet, inspiré en partie par le théorème non publié de Duminy, É. Ghys a démontré dans [10] qu'il existe un voisinage de l'identité dans  $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$  tel que, si  $\Gamma$  est un groupe engendré par un nombre fini d'éléments dans ce voisinage, alors  $\Gamma$  n'a pas de minimal exceptionnel. Il obtient aussi des résultats de récurrence pour l'action d'un tel groupe, lesquels ont été récemment améliorés notamment par J. Rebelo, qui a démontré des propriétés d'ergodicité et de rigidité pour de telles actions (voir [24], [25], [26] et [27]). Dans notre contexte, nous obtenons le théorème d'ergodicité suivant.

**Théorème D.** *Soit  $\Gamma$  un groupe de difféomorphismes du cercle engendré par une famille  $\Gamma^1$  d'éléments qui vérifient  $\|f''\| < \delta_0$  pour tout  $f \in \Gamma^1$ , où  $\delta_0$  est la constante donnée par le théorème de Duminy. Supposons de plus que  $\Gamma$  n'a pas d'orbite finie et que les points périodiques d'au moins l'un de ses générateurs sont isolés. Alors  $\Gamma$  agit sur  $S^1$  de manière ergodique (par rapport à la mesure de Lebesgue).*

Notons que d'après le théorème de Duminy, l'hypothèse suivant laquelle  $\Gamma$  n'a pas d'orbite finie est équivalente au fait que toutes ses orbites sont denses.

On ne connaît pas d'exemple d'un groupe de type fini de difféomorphismes de classe  $C^2$  du cercle dont les orbites soient denses et dont l'action ne soit pas ergodique sur  $S^1$  ; le théorème précédent dit qu'il est impossible de fabriquer de tels exemples avec des générateurs proches des rotations. En ce qui concerne la rigidité, nous donnons en classe  $C^r$ ,  $2 \leq r \leq \omega$ , une version faible des résultats obtenus par J. Rebelo dans le cas analytique réel.

**Théorème E.** *Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux groupes de difféomorphismes directs du cercle vérifiant les hypothèses du théorème D (par rapport à une constante  $\delta_1$  éventuellement plus petite). Soient  $\Gamma_1^1 = \{f_{i,1} : i \in \mathcal{I}\}$  et  $\Gamma_2^1 = \{f_{i,2} : i \in \mathcal{I}\}$  des familles des générateurs proches des rotations de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  respectivement. Supposons que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  soient conjugués par un homéomorphisme direct  $\varphi$  de  $S^1$ , de sorte que  $f_{i,2} = \varphi \circ f_{i,1} \circ \varphi^{-1}$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$ . Si  $\varphi$  est absolument continu, alors  $\varphi$  est un difféomorphisme de classe  $C^2$ . De plus, si chaque  $f_{i,j}$ ,  $i \in \mathcal{I}$ ,  $j = 1, 2$ , est de classe  $C^r$ , avec  $2 \leq r \leq \omega$ , alors  $\varphi$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$ .*

Pour  $r \geq 2$ , si deux groupes de difféomorphismes directs et de classe  $C^r$  du cercle dont les orbites sont denses et qui ne sont pas conjugués à des groupes de rotations sont  $C^1$ -conjugués, alors ils sont  $C^r$ -conjugués (voir [13]). Le résultat ci-dessus est une version plus fine de ce fait sous l'hypothèse que les générateurs soient proches des rotations. Signalons par ailleurs que le problème de la différentiabilité de la conjugaison pour des groupes topologiquement conjugués à des groupes de rotations est d'une nature différente. Concernant ce sujet, nous renvoyons le lecteur intéressé à [1], [16] et [23].

Nous ignorons si dans le cas d'orbites finies on peut obtenir des résultats génériques d'ergodicité et de rigidité locaux analogues à ceux de [24] et [25]. Ce problème semble relié à celui de savoir s'il existe un analogue du théorème de Duminy pour des groupes de difféomorphismes de la droite engendrés par des éléments proches des translations (ou, plus généralement, pour des pseudo-groupes de difféomorphismes de dimension 1).

**Remerciements** Étienne Ghys m'a expliqué l'idée principale de la preuve du théorème de Duminy et m'a donné une copie du manuscrit [8]. Thierry Barbot et Pierre de la Harpe ont fait des corrections aux versions préliminaires de l'article, et avec Jan Kiwi et Juan Rivera j'ai eu de fructueuses discussions sur le sujet. Je les remercie tous pour leur gentillesse. Je remercie également le rapporteur anonyme pour son travail de lecture minutieuse, ses remarques et ses corrections à l'article.

## 1 Quelques faits classiques

On munit le cercle unité  $S^1$  de l'orientation canonique. Les intervalles de  $S^1$  sont munis de l'orientation induite. Au cours de ce travail nous ne considérons que des homéomorphismes et des difféomorphismes de  $S^1$  qui préservent l'orientation.

Sur le cercle on considère la mesure de Lebesgue normalisée, que l'on note  $\text{Leb}$ . Sauf mention du contraire, la longueur des intervalles du cercle est aussi normalisée, de sorte que la longueur totale de  $S^1$  est 1. On désigne par  $|I|$  la longueur de l'intervalle  $I$ . La distance entre deux points  $p$  et  $q$  de  $S^1$  est le minimum entre les longueurs des intervalles  $(p, q)$  et  $(q, p)$ . Elle est notée  $\text{dist}(p, q)$ .

Pour  $f \in \text{Homéo}_+(S^1)$  on fixe un point  $x \in \mathbb{R}$  et un relèvement de  $f$  à la droite, que l'on désigne encore par  $f$ . Dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  on considère le *nombre de rotation* de  $f$  défini par

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{f^n(x)}{n} \text{ mod } \mathbb{Z}.$$

On sait que la limite de la définition existe et sa valeur (modulo  $\mathbb{Z}$ ) ne dépend pas des choix du relèvement  $f$  et de  $x$ . De plus, il est connu depuis les travaux de Poincaré que  $\rho(f)$  contient plusieurs informations sur la dynamique de  $f$ . Pour le résultat suivant on peut consulter [22].

**Théorème 1.1.** *Pour  $f \in \text{Homéo}_+(S^1)$  les affirmations suivantes sont vérifiées :*

- (a) *le nombre  $\rho(f)$  est rationnel si et seulement si  $f$  possède (au moins) un point périodique ;*
- (b) *si  $\rho(f)$  est rationnel et  $K$  un sous-ensemble fermé de  $S^1$  invariant par  $f$ , alors  $f$  possède (au moins) un point périodique sur  $K$  ;*
- (c) *on a l'égalité  $\rho(f) = \rho(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})$  pour tout  $\varphi \in \text{Homéo}_+(S^1)$ .*

Lorsque  $f$  appartient à  $\text{Diff}_+^{\log}(\mathbb{S}^1)$  et lorsque  $\rho(f)$  est irrationnel, alors non seulement il n'y a pas d'orbite finie, mais toutes les orbites sont denses, et  $f$  est topologiquement conjugué à la rotation d'angle  $\rho(f)$ . C'est le théorème de Denjoy. De plus,  $f$  agit de manière ergodique sur  $\mathbb{S}^1$  (voir la remarque 4.2 du §4).

Rappelons que tout difféomorphisme de classe  $C^2$  du cercle appartient à  $\text{Diff}_+^{\log}(\mathbb{S}^1)$  : pour  $f \in \text{Diff}_+^2(\mathbb{S}^1)$  on a

$$\text{var}(\log(f')) = \int_{\mathbb{S}^1} \left| \frac{f''(s)}{f'(s)} \right| ds.$$

Dans cette direction, le théorème de Denjoy est optimal. En effet, dans le §X de [16], M. Herman démontre que pour chaque  $0 \leq \alpha < 1$ , chaque  $\theta$  irrationnel, et chaque voisinage  $V$  de la rotation d'angle  $\theta$  dans  $\text{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S}^1)$ , il existe un élément dans  $V$  de nombre de rotation  $\theta$  et sans orbite dense ( $\text{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S}^1)$  désigne le groupe des difféomorphismes directs du cercle dont la dérivée est Hölder continue d'exposant  $\alpha$ ). Le lecteur trouvera dans [18] une version plus précise de la classe de différentiabilité optimale pour le théorème de Denjoy.

Le cas d'une action d'un groupe non cyclique est beaucoup plus compliqué. Pour la commodité du lecteur, nous avons inclus la preuve de la propriété de trichotomie du début de l'introduction.

**Preuve de la propriété de trichotomie** On considère la collection des sous-ensembles fermés non vides et invariants de  $\mathbb{S}^1$ , que l'on munit de l'ordre donné par l'inclusion. Puisque l'intersection de compacts emboîtés non vides est non vide, on peut appliquer le lemme de Zorn. Soit donc  $K$  un ensemble minimal pour cet ordre. Le bord  $\partial K$  et l'ensemble  $K'$  des points d'accumulation de  $K$  étant aussi fermés et invariants, on a les possibilités suivantes :

- (a)  $K'$  est l'ensemble vide : dans ce cas,  $K$  est une orbite finie ;
- (b)  $\partial K$  est l'ensemble vide : dans ce cas  $K = \mathbb{S}^1$ , et donc toutes les orbites sont denses ;
- (c)  $K = K'$  et  $\partial K = K$ , c'est-à-dire  $K$  est un fermé d'intérieur vide et sans points isolés. En d'autres termes,  $K$  est un ensemble de Cantor.

Dans le dernier cas, montrons que  $K$  est contenu dans l'adhérence de toute orbite, ce qui implique l'unicité. Si  $x \in K$ , alors il est clair que l'orbite de  $x$  est dense dans  $K$ . Soit donc  $x \in \mathbb{S}^1 - K$  et soit  $y$  un point arbitraire de  $K$ . On note  $I$  la composante connexe de  $\mathbb{S}^1 - K$  contenant  $x$  et on note  $a$  un point dans la frontière de  $I$ . L'orbite de  $a$  étant dense dans  $K$  et  $K$  n'ayant pas de points isolés, il existe une suite  $(f_n)$  dans  $\Gamma$  telle que  $f_n(a)$  tend vers  $y$  et telle que les intervalles  $f_n(I)$  sont disjoints. Comme la longueur de  $f_n(I)$  doit tendre vers zéro, la suite  $(f_n(x))$  tend aussi vers  $y$ .

□

Lorsque  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Diff}_+^{\log}(\mathbb{S}^1)$  qui agit avec un minimal exceptionnel, le théorème de Denjoy impose une contrainte : le nombre de rotation de chaque élément de  $\Gamma$  est rationnel, et

donc tout élément possède des points périodiques. Cette remarque sera utilisée plusieurs fois dans la preuve des théorèmes.

Nous finissons ce paragraphe avec quelques considérations sur la variation totale du logarithme de la dérivée d'une application. Pour  $f \in \text{Diff}_+^{\log}(\mathbb{S}^1)$  on désigne par  $W(f)$  la variation totale du logarithme de la dérivée de  $f$ , c'est-à-dire

$$W(f) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} \left| \log(f'(a_{i+1})) - \log(f'(a_i)) \right|,$$

où le supremum est pris sur tous les  $n$ -uples de points  $a_0 < \dots < a_n = a_0$  cycliquement ordonnés sur  $\mathbb{S}^1$  et sur tous les entiers positifs  $n$ . Notons que pour tout  $f \in \text{Diff}_+^{\log}(\mathbb{S}^1)$  il existe nécessairement un point  $p \in \mathbb{S}^1$  tel que  $f'(p) = 1$ . On obtient ainsi

$$\inf_{x \in \mathbb{S}^1} f'(x) \geq e^{-W(f)}, \quad \sup_{x \in \mathbb{S}^1} f'(x) \leq e^{W(f)}. \quad (2)$$

Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ , ou si  $I$  est un sous-intervalle du domaine de définition de  $f$ , on désigne par  $W(f; I)$  la variation du logarithme de la dérivée de  $f$  sur  $I$ . Il est important de remarquer que si  $f$  et  $g$  sont des difféomorphismes alors on a l'inégalité

$$W(f \circ g; I) \leq W(g; I) + W(f; g(I)), \quad (3)$$

ainsi que l'égalité

$$W(f^{-1}; I) = W(f; f^{-1}(I)). \quad (4)$$

Finalement, si  $I_1$  et  $I_2$  sont des intervalles contenus dans un intervalle  $I$  du domaine de définition de  $f$ , alors on a

$$\frac{|f(I_2)|}{|I_2|} e^{-W(f; I)} \leq \frac{|f(I_1)|}{|I_1|} \leq \frac{|f(I_2)|}{|I_2|} e^{W(f; I)}. \quad (5)$$

Comme application de ces propriétés, montrons l'inégalité (1). Soit  $x_0$  un point qui réalise le maximum  $\eta$  de la fonction  $\eta_f(x) = |f(x) - (x + \rho(f))|$ . Supposons que  $f(x_0) \geq x_0 + \rho(f)$ , l'autre cas étant analogue. Il existe nécessairement un point  $y_0 \in [x_0, x_0 + 1]$  tel que  $\eta_f(y_0) = 0$ . En effet, dans le cas contraire il existerait  $1 > \varepsilon > 0$  tel que  $1 - \varepsilon \geq \eta_f(x) \geq \varepsilon$  pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$ . Donc, en passant au relèvement, on aurait

$$1 - \varepsilon \geq \left| \frac{f^n(x)}{n} - \rho(f) \right| \geq \varepsilon$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui contredit la définition de  $\rho(f)$ . Puisque  $\frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0} = f'(p)$  pour un certain  $p \in \mathbb{S}^1$ , d'après (2) on obtient

$$y_0 - x_0 - \eta = f(y_0) - f(x_0) \geq e^{-W(f)}(y_0 - x_0),$$

et donc  $\eta \leq (y_0 - x_0)(1 - e^{-W(f)}) \leq 1 - e^{-W(f)}$ .

## 2 Une application de retour dilatante : les lemmes de Duminy

La preuve des résultats de ce travail s'appuie sur le manuscrit [8], où G. Duminy étudie les orbites semi-exceptionnelles de feuilletages de codimension 1 (les résultats de [8] ont été récemment redémontrés dans [4]). Les lemmes que nous présentons ci-dessous sont des versions modifiées de quelques lemmes qui se trouvent dans ce manuscrit.

**Lemme 2.1.** *Soient  $a, a', b, b', c$  des nombres réels tels que  $a \leq a' < c' \leq c < b$  et  $a < b' < b$ . Soient  $f : [a, c] \rightarrow [a, b]$  et  $g : [c', b] \rightarrow [a, b']$  deux difféomorphismes de classe  $C^{\log}$  tels que  $f(x) > x$  pour  $x \neq a$ ,  $g(x) < x$  pour tout  $x$ ,  $f(c') > c$  et  $g(c) = a'$  (voir la figure 1). Supposons que  $[u, v] \subset [c, b]$  et que  $m, n \in \mathbb{N}$  sont tels que l'application  $\hat{\psi} = g^{-n} \circ f^{-m}$  est définie sur  $[u, v]$ . Alors*

$$\frac{\hat{\psi}(v) - \hat{\psi}(u)}{v - u} \leq \frac{\hat{\psi}(v) - f^{-1}(\hat{\psi}(v))}{v - f^{-1}(v)} \frac{b - g^{-1}(a)}{f(g^{-1}(a)) - c} \left( 1 - \frac{1}{\sup_{x \in [a, c]} f'(x)} \right) e^{W(f; [a, c]) + W(g; [c, b])}. \quad (6)$$

**Preuve** Par commodité on note  $\hat{f} = f^{-1}$  et  $\hat{g} = g^{-1}$  (voir la figure 2). Rappelons que  $W(\hat{f}; [a, b]) = W(f; [a, c])$  et  $W(\hat{g}; [a', b']) = W(g; [c, b])$ . Il s'agit alors de montrer l'inégalité

$$\frac{\hat{\psi}(v) - \hat{\psi}(u)}{v - u} \leq \frac{\hat{\psi}(v) - \hat{f}(\hat{\psi}(v))}{v - \hat{f}(v)} \frac{b - \hat{g}(a)}{\hat{f}^{-1}(\hat{g}(a)) - c} \left( 1 - \inf_{x \in [a, b]} \hat{f}'(x) \right) e^{W(\hat{f}; [a, b]) + W(\hat{g}; [a', b'])}. \quad (7)$$

Pour cela, on remarque d'abord que

$$W(\hat{f}^m; [\hat{f}(v), v]) \leq \sum_{k=0}^{m-1} W(\hat{f}; [\hat{f}^{k+1}(v), \hat{f}^k(v)]) \leq W(\hat{f}; [a, b]).$$

Comme  $\hat{f}(v) \leq c \leq u < v$ , on a

$$\frac{\hat{f}^m(v) - \hat{f}^m(u)}{v - u} \leq \frac{\hat{f}^m(v) - \hat{f}^{m+1}(v)}{v - \hat{f}(v)} e^{W(\hat{f}^m; [\hat{f}(v), v])} \leq \frac{\hat{f}^m(v) - \hat{f}^{m+1}(v)}{v - \hat{f}(v)} e^{W(\hat{f}; [a, b])}.$$

De plus,  $\hat{f}^{m+1}(v) - a = \hat{f}(\hat{f}^m(v)) - \hat{f}(a) \geq (\hat{f}^m(v) - a) \inf_{x \in [a, b]} \hat{f}'(x)$ , d'où on obtient

$$\hat{f}^m(v) - \hat{f}^{m+1}(v) \leq (\hat{f}^m(v) - a) \left( 1 - \inf_{x \in [a, b]} \hat{f}'(x) \right).$$

Il en résulte alors

$$\frac{\hat{f}^m(v) - \hat{f}^m(u)}{v - u} \leq \frac{\hat{f}^m(v) - a}{v - \hat{f}(v)} \left( 1 - \inf_{x \in [a, b]} \hat{f}'(x) \right) e^{W(\hat{f}; [a, b])}. \quad (8)$$

De même, puisque  $\hat{g}^n$  est définie sur  $[\hat{f}^m(u), \hat{f}^m(v)]$  et que  $a' \leq \hat{f}^m(u) < \hat{f}^m(v) \leq c = \hat{g}(a')$ , on a

$$\frac{\hat{g}^n(\hat{f}^m(v)) - \hat{g}^n(\hat{f}^m(u))}{\hat{f}^m(v) - \hat{f}^m(u)} \leq \frac{\hat{g}^n(\hat{f}^m(v)) - \hat{g}^n(a)}{\hat{f}^m(v) - a} e^{W(\hat{g}; [a', b'])}. \quad (9)$$

On obtient alors, d'après (8) et (9),

$$\frac{\hat{\psi}(v) - \hat{\psi}(u)}{v - u} \leq \frac{\hat{\psi}(v) - \hat{f}(\hat{\psi}(v))}{v - \hat{f}(v)} \frac{\hat{\psi}(v) - \hat{g}(a)}{\hat{\psi}(v) - \hat{f}(\hat{\psi}(v))} \left(1 - \inf_{x \in [a, b]} \hat{f}'(x)\right) e^{W(\hat{f}; [a, b]) + W(\hat{g}; [a', b'])}.$$

Si  $\hat{f}(\hat{\psi}(v)) \leq \hat{g}(a)$  alors  $(\hat{\psi}(v) - c)/(\hat{\psi}(v) - \hat{f}(\hat{\psi}(v))) \leq 1$ , ce qui rend évidente l'inégalité (7) dans ce cas. Sinon, c'est que  $\hat{\psi}(v)$  appartient à l'intervalle  $[\hat{f}^{-1}(\hat{g}(a)), b]$ , et donc

$$\frac{\hat{\psi}(v) - \hat{g}(a)}{\hat{\psi}(v) - \hat{f}(\hat{\psi}(v))} \leq \frac{b - \hat{g}(a)}{\hat{f}^{-1}(\hat{g}(a)) - c},$$

d'où on obtient encore (7). □

**Remarque 2.2.** Si  $g(c) = a$ , le lecteur vérifiera sans difficulté que l'inégalité (6) est stricte lorsque  $v$  n'appartient pas à l'orbite de  $a$  par le pseudo-groupe engendré par  $f$  et  $g$ .

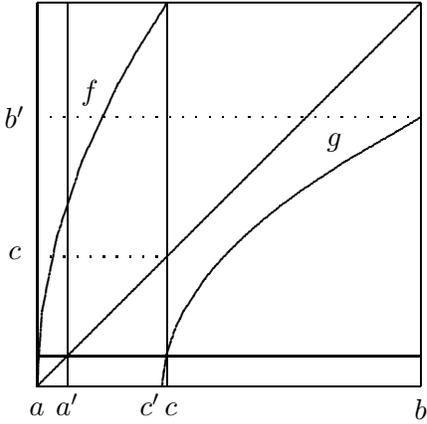


Figure 1

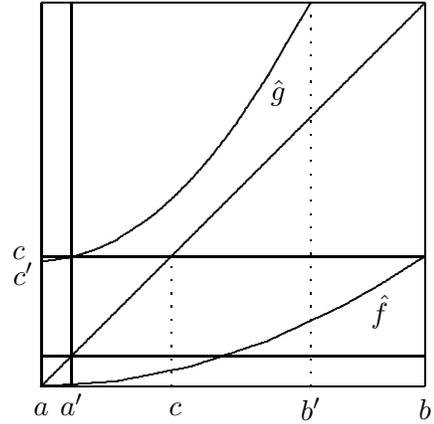


Figure 2

Étant données deux applications  $f$  et  $g$  comme dans le lemme précédent, pour chaque  $x \in ]c, b]$  il existe un entier positif  $n = n(x)$  tel que  $g^{n-1}(x) \in ]c, b]$  et  $g^n(x) \in ]a', c]$ . De même, pour  $y \in ]a', c]$  il existe  $m = m(y)$  tel que  $f^{m-1}(y) \in ]a', c]$  et  $f^m(y) \in ]c, b]$ . L'application de premier retour  $\psi : ]c, b] \rightarrow ]c, b]$  est définie par

$$\psi(x) = f^{m(g^n(x))} \circ g^n(x).$$

Notons que cette application a un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité, lequel est fini lorsque  $g(c) > a$ . En effet, les points de discontinuité sont les points de l'ensemble  $\{g^{-n}(f^{-m}(c) \cap [a', c]) : m, n \in \mathbb{N}\}$  qui sont contenus dans  $]c, b]$ . Si  $g(c) > a$  alors  $\psi$  peut être considérée comme une application de l'intervalle fermé  $[c, b]$  sur lui-même.

Par commodité, on pose

$$m(f, g) = \frac{b - g^{-1}(a)}{f(g^{-1}(a)) - c}, \quad M(f) = \frac{\sup_{x \in [c, b]}(x - \hat{f}(x))}{\inf_{x \in [c, b]}(x - \hat{f}(x))}. \quad (10)$$

On peut montrer directement que  $M(f)$  est proche de 1 si la dérivée de  $f$  est proche de 1 et la variation  $W(f; [a, c])$  est petite (voir le lemme 5.1 au §5). Néanmoins, pour le moment le lemme suivant nous suffira.

**Lemme 2.3.** *Sous les hypothèses du lemme 2.1, supposons de plus que*

$$m(f, g) \left( 1 - \frac{1}{\sup_{x \in [a, c]} f'(x)} \right) e^{W(f; [a, c]) + W(g; [c, b])} < 1. \quad (11)$$

Alors pour tout  $\tau > 1$  il existe un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $(\psi^N)'(x) > \tau$  pour tout point  $x$  dans le domaine de différentiabilité de  $\psi^N$ .

**Preuve** Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$M(f) m(f, g)^N \left( 1 - \frac{1}{\sup_{x \in [a, c]} f'(x)} \right)^N e^{N(W(f; [a, c]) + W(g; [c, b]))} < \frac{1}{\tau}. \quad (12)$$

Nous affirmons que chaque branche de  $\psi^N$  est  $\tau$ -dilatante. Pour montrer cela, soit  $x$  un point à l'intérieur de l'une des composantes connexes du domaine de différentiabilité de  $\psi^N$ . Fixons un petit intervalle  $[x, x + \varepsilon]$  contenu dans cette composante connexe. On pose  $[u_0, v_0] = [x, x + \varepsilon]$  et  $[u_k, v_k] = \psi^k([u_0, v_0])$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ . L'inégalité (6) appliquée à  $\hat{\psi} = \psi^{-1}$  donne

$$\frac{v_k - u_k}{v_{k+1} - u_{k+1}} \leq \frac{v_k - f^{-1}(v_k)}{v_{k+1} - f^{-1}(v_{k+1})} m(f, g) \left( 1 - \frac{1}{\sup_{x \in [a, c]} f'(x)} \right) e^{W(f; [a, c]) + W(g; [c, b])}.$$

En prenant le produit de  $k = 0$  à  $k = N - 1$  on obtient

$$\frac{v_0 - u_0}{v_N - u_N} \leq \frac{v_0 - f^{-1}(v_0)}{v_N - f^{-1}(v_N)} m(f, g)^N \left( 1 - \frac{1}{\sup_{x \in [a, c]} f'(x)} \right)^N e^{N(W(f; [a, c]) + W(g; [c, b]))},$$

et donc, d'après (12),

$$\frac{\varepsilon}{\psi^N(x + \varepsilon) - \psi^N(x)} < \frac{1}{\tau},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\psi^N(x + \varepsilon) - \psi^N(x)}{\varepsilon} > \tau.$$

Puisque ceci est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$  petit, on en déduit que  $(\psi^N)'(x) > \tau$ .

□

**Remarque 2.4.** Notons que si

$$M(f) m(f, g) \left( 1 - \frac{1}{\sup_{x \in [a, c]} f'(x)} \right) e^{W(f; [a, c]) + W(g; [c, b])} < \frac{1}{\tau}, \quad (13)$$

alors la preuve du lemme précédent montre que chaque branche de l'application  $\psi$  est  $\tau$ -dilatante.

Dans une première lecture, les lemmes de Duminy risquent de paraître trop techniques. Pour mieux comprendre ces lemmes, on peut considérer le cas particulier où les applications  $f$  et  $g$  sont affines, disons  $f(x) = \nu x$  pour  $x \in [0, 1/\nu]$ , avec  $\nu > 1$ , et  $g(x) = \eta(x - 1/\nu)$  pour  $x \in [1/\nu, 1]$ , avec  $\eta(1 - 1/\nu) < 1$ . Dans ce cas, l'application de premier retour  $\psi : [1/\nu, 1] \rightarrow [1/\nu, 1]$  est donnée sur chaque intervalle de la forme  $g^{-1}([1/\nu^{n+1}, 1/\nu^n])$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , par  $\psi(x) = f^n \circ g(x)$ . Puisque pour tout  $x \in g^{-1}([1/\nu^{n+1}, 1/\nu^n])$  on a

$$\frac{1}{\nu^n} \geq \eta \left( x - \frac{1}{\nu} \right) \geq \frac{1}{\nu^{n+1}},$$

on obtient

$$\psi'(x) = \eta \nu^n \geq \frac{1}{x(1 - 1/\nu)} \geq \frac{1}{\nu(1 - \frac{1}{\nu})}. \quad (14)$$

Notons d'autre part que  $M(f) = \nu$ . L'inégalité (14) peut ainsi être lue comme

$$\psi'(x) \geq 1 / M(f) \left( 1 - \frac{1}{\sup_{x \in [0, 1/\nu]} f'(x)} \right).$$

Les valeurs de  $W(f)$  et  $W(g)$  étant nulles dans le cas affine, on reconnaîtra la similitude entre cette dernière inégalité et les inégalités qui apparaissent dans les lemmes de Duminy.

### 3 Non existence de minimal exceptionnel

#### 3.1 En classe $C^{\log}$ : le théorème B

Pour illustrer l'idée de la démonstration du théorème B, supposons qu'un groupe agisse sur le cercle avec un minimal exceptionnel  $K$  et que deux générateurs  $f$  et  $g$  sont comme dans la figure 1 sur un sous-intervalle  $[a, b]$  de  $S^1$  non disjoint de  $K$ , avec  $g(c) = a$ . Les points  $a, c$  et  $b$  appartiennent à  $K$ . En effet, si  $y$  est un point de  $[a, b] \cap K$  alors  $f^{-n}(y)$  s'accumule sur  $a$  pour  $n \geq 0$ , et donc  $a$  appartient à  $K$ ; par suite,  $g^{-1}(a) = c$  et  $f(c) = b$  appartiennent aussi à  $K$ . Soit  $]u, v[ \subset ]c, b[$  une composante connexe de  $S^1 - K$  de longueur maximale. Si l'inégalité (11) est vérifiée, alors pour  $N \in \mathbb{N}$  suffisamment grand,  $\psi^N(]u, v[)$  est une composante connexe de  $S^1 - K$  de taille plus grande que celle de  $]u, v[$ , et on a donc une contradiction. Un examen attentif des arguments de la preuve des lemmes de Duminy (voir la remarque 2.2) permet d'obtenir aussi une contradiction lorsque

$$\left(1 - \frac{1}{\sup_{x \in [a, c]} f'(x)}\right) e^{W(f; [a, c]) + W(g; [c, b])} = 1.$$

Donc, l'inégalité suivante doit être satisfaite :

$$\left(1 - \frac{1}{\sup_{x \in [a, c]} f'(x)}\right) e^{W(f; [a, c]) + W(g; [c, b])} > 1. \quad (15)$$

Cette inégalité entraîne, d'après (2),

$$(1 - e^{-W(f)}) e^{W(f; [a, c]) + W(g; [c, b])} > 1.$$

Si  $W(f) \leq \lambda$  et  $W(g) \leq \lambda$  alors  $(1 - e^{-\lambda}) e^{2\lambda} > 1$ , c'est-à-dire  $e^{2\lambda} - e^\lambda - 1 > 0$ , ce qui n'est pas possible pour  $\lambda \leq \log((\sqrt{5} + 1)/2)$  (nous verrons dans le §3.4 que l'apparition du nombre d'or n'est pas mystérieuse : il semblerait être relié à la constante optimale du théorème B).

Malheureusement, le cas général présente des problèmes techniques : il n'existe pas toujours deux générateurs reliés comme dans la situation des lemmes de Duminy. Nous verrons néanmoins que l'on peut surmonter cette difficulté lorsqu'on suppose que l'un des générateurs de  $\Gamma$  a ses points périodiques isolés. Avant de passer à la preuve du théorème B remarquons que, grâce à l'égalité (4), il n'y a pas de perte de généralité pour ce théorème si on suppose  $\Gamma^1$  symétrique. Nous ferons dans la suite de ce paragraphe cette hypothèse, c'est-à-dire nous supposons que si  $f \in \Gamma^1$  alors  $f^{-1} \in \Gamma^1$ .

**Preuve du théorème B** Supposons que  $\Gamma$  possède un minimal exceptionnel  $K$ . D'après le théorème de Denjoy, l'ensemble des points périodiques de chaque élément de  $\Gamma$  est non vide. Par

hypothèse, il existe un générateur  $g$  de  $\Gamma$  dont tous les points périodiques sont isolés. On note  $\text{Per}(g)$  l'ensemble des points périodiques de  $g$ , et on note  $P(g) = \text{Per}(g) \cap K$ . D'après l'assertion (b) du théorème 1.1, l'ensemble  $P(g)$  est non vide. Si  $k \in \mathbb{N}$  est l'ordre des points périodiques de  $g$ , alors on pose  $G = g^k$ . Nous affirmons maintenant qu'il existe un point  $p \in P(g)$  et un élément  $f \in \Gamma^1$  tels que  $f(p) \in S^1 - P(g)$ . En effet, dans le cas contraire, l'ensemble  $P(g)$  serait invariant par  $\Gamma$ , ce qui contredirait la minimalité de  $K$ .

On désigne par  $u$  et  $v$  les points périodiques de  $g$  à gauche et à droite de  $f(p)$  respectivement. L'application  $F = f \circ g^k \circ f^{-1}$  possède au moins un point fixe dans  $[u, v]$ , à savoir,  $f(p)$ . Soit  $a$  le point fixe de cette application à gauche de  $v$ , et  $q$  le point fixe à droite de  $a$ . Remarquons que les points  $a, u, v, p$  et  $q$  appartiennent tous à  $K$ . Quitte à remplacer  $G$  par  $G^{-1}$  et  $F$  par  $F^{-1}$ , on peut supposer que  $G(x) < x$  et  $F(x) > x$  pour tout  $x \in ]a, v[$  (voir la figure 3).

Nous affirmons maintenant que, si  $\lambda$  est assez petit, alors le point  $b = F(G^{-1}(a)) \in K$  appartient à l'intervalle  $]a, v[$ . Pour démontrer cela, on remarque d'abord que

$$W(F^{-1}; [a, q]) = W(F; [a, q]) \leq \sum_{j=0}^{k-1} W(f \circ g \circ f^{-1}; f \circ g^j \circ f^{-1}([a, q])) \leq W(f \circ g \circ f^{-1}) \leq 3\lambda.$$

De la même façon on obtient  $W(G^{-1}; [u, v]) = W(G; [u, v]) \leq \lambda$ . Soient  $x_0 \in (a, v)$  et  $y_0 \in (a, q)$  tels que

$$(F^{-1})'(x_0) = \frac{F^{-1}(v) - a}{v - a}, \quad (F^{-1})'(y_0) = 1.$$

On a évidemment  $|\log((F^{-1})'(y_0)) - \log((F^{-1})'(x_0))| \leq W(F^{-1}; [a, q])$ , et donc

$$F^{-1}(v) - a \geq e^{-3\lambda}(v - a). \quad (16)$$

De la même façon on obtient

$$v - G^{-1}(a) \geq e^{-\lambda}(v - a). \quad (17)$$

Si  $b$  n'était pas dans  $]a, v[$  on aurait  $F^{-1}(v) \leq G^{-1}(a)$ . Ceci impliquerait, d'après (16) et (17),

$$v - a \geq (F^{-1}(v) - a) + (v - G^{-1}(a)) \geq (e^{-\lambda} + e^{-3\lambda})(v - a),$$

et donc  $e^{3\lambda} - e^{2\lambda} \geq 1$ , ce qui n'est pas possible pour  $\lambda < \log(1.46557) \sim 0.382$ .

On peut alors appliquer les lemmes de Duminy à  $F$  et  $G$  sur l'intervalle  $[a, b]$ . Notons que pour tout  $x \in [a, q]$  on a  $|\log(F'(x)) - \log(F'(y_0))| \leq W(F; [a, q]) \leq 3\lambda$ , et donc  $\sup_{x \in [a, b]} F'(x) \leq e^{3\lambda}$ . Pour  $c = G^{-1}(a)$ , l'inégalité (15) appliquée à  $F$  et  $G$  donne

$$3\lambda + \lambda \geq W(F; [a, c]) + W(G; [c, b]) > \log \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{\sup_{x \in [a, c]} F'(x)}} \right) \geq \log \left( \frac{1}{1 - e^{-3\lambda}} \right),$$

et donc on a  $e^{4\lambda} - e^\lambda > 1$ , ce qui est impossible pour  $\lambda \leq \log(1.22074) \sim 0.199$ .

□

**Remarque 3.1.** Notons qu'au cours de la preuve on n'a utilisé l'hypothèse de points périodiques isolés de  $g$  que pour s'assurer que les points de  $P(g)$  sont isolés dans  $\text{Per}(g)$ .

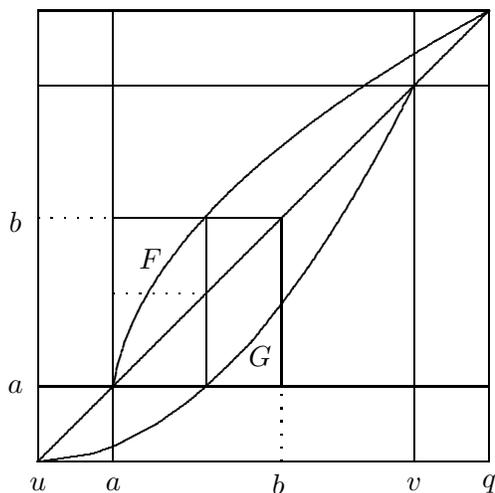


Figure 3

### 3.2 En classe $C^2$ : le théorème A

Pour la preuve du théorème A, remarquons d'abord que pour tout  $f \in \Gamma$  et tout  $x \in S^1$ ,

$$1 - \|f''\| \leq f'(x) \leq 1 + \|f''\|. \quad (18)$$

En effet, pour tout point  $p \in S^1$  on a

$$\left| \frac{f'(x) - f'(p)}{x - p} \right| \leq \|f''\|,$$

et donc, en prenant  $p$  tel que  $f'(p) = 1$  on obtient (18). Par conséquence, si  $\|f''\| \leq \delta$  alors

$$W(f) = \int_{S^1} \left| \frac{f''(s)}{f'(s)} \right| ds \leq \frac{\delta}{1 - \delta}.$$

Par suite, si  $\|f''\| \leq \delta_0 = \lambda_0/(1 + \lambda_0) \sim 0.165$ , alors  $W(f) \leq \lambda_0 \sim 0.199$ . Le théorème A découle ainsi du théorème B.

### 3.3 En classe $C^\omega$ : le théorème C

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$  et soit  $\Gamma^1 = \{f_i : i \in \mathcal{I}\}$  une partie génératrice de  $\Gamma$ . On suppose que  $f_i \neq f_j$  pour  $i \neq j$  dans  $\mathcal{I}$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$  on définit les sous-ensembles  $\Gamma^n$  de  $\Gamma$  par

$$\Gamma^n = \{f \in \Gamma : f = f_{i_k} \circ \cdots \circ f_{i_1}, \quad f_{i_j} \in \Gamma^1, \quad k \leq n\}.$$

Le lemme suivant porte un intérêt général. Il sera essentiel pour se débarrasser, dans le cas analytique réel, de l'hypothèse suivant laquelle les points périodiques de l'un des générateurs sont isolés.

**Lemme 3.2.** *Supposons que  $\Gamma$  agisse avec des orbites denses et qu'il ne soit pas topologiquement conjugué à un groupe de rotations. Alors il existe un élément  $g$  dans  $\Gamma^4$  qui n'est pas conjugué à une rotation.*

**Preuve** D'après la proposition 6.5 du premier appendice, il existe deux éléments  $f_i$  et  $f_j$  dans  $\Gamma^1$  qui ne commutent pas. Si  $f_i f_j$  n'est pas conjugué à une rotation, alors  $g = f_i f_j \in \Gamma^2$  satisfait l'affirmation du lemme.

Supposons maintenant que  $f_i f_j$  est conjugué à une rotation. Nous affirmons qu'il existe  $a \in \mathbb{S}^1$  tel que  $f_i f_j(a) = f_j f_i(a)$ . Pour démontrer cette affirmation, prenons un homéomorphisme direct  $\varphi$  de  $\mathbb{S}^1$  tel que  $\varphi f_i f_j \varphi^{-1}$  soit une rotation de  $\mathbb{S}^1$ , disons d'angle  $\theta$ . Si l'affirmation n'est pas vraie, alors il existe  $0 < \varepsilon < 1$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$  on a

$$\varepsilon \leq |\varphi f_j f_i \varphi^{-1}(x) - (x + \theta)| \leq 1 - \varepsilon.$$

Cette inégalité entraîne  $|\rho(\varphi f_j f_i \varphi^{-1}) - \theta| \geq \varepsilon$ , ce qui est absurde, car  $\varphi f_i f_j \varphi^{-1}$  et  $\varphi f_j f_i \varphi^{-1}$  sont topologiquement conjugués.

L'application  $f_i f_j f_i^{-1} f_j^{-1} \in \Gamma^4$  possède donc des points fixes sur  $\mathbb{S}^1$ . Cette application n'est pas l'identité, car  $f_i$  et  $f_j$  ne commutent pas. Ceci achève la preuve du lemme. □

Supposons maintenant que  $\Gamma$  agisse sur  $\mathbb{S}^1$  en admettant un minimal exceptionnel  $K$ . En suivant [11] et [21], on retire du cercle chaque composante connexe de  $\mathbb{S}^1 - K$  et puis on identifie les extrémités de ces composantes. On obtient ainsi un cercle topologique, que l'on note  $\mathbb{S}_K^1$ . Le groupe  $\Gamma$  agit sur ce cercle de manière naturelle par homéomorphismes, et toute orbite par l'action induite est dense. Pour chaque  $f \in \Gamma$ , on note  $\phi(f)$  l'homéomorphisme de  $\mathbb{S}_K^1$  induit par  $f$ .

**Proposition 3.3.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Diff}_+^{\text{log}}(\mathbb{S}^1)$  qui admet un minimal exceptionnel. Supposons qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $W(f_i) \leq C$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$ . Alors il existe un élément  $g$  dans  $\Gamma^4$  tel que  $\phi(g)$  possède des points périodiques et n'est pas conjugué à une rotation.*

**Preuve** D'abord, si  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Diff}_+^{\log}(S^1)$  qui agit en admettant un minimal exceptionnel  $K$ , alors d'après le théorème de Denjoy et l'item (b) du théorème 1.1, chaque  $f_i$  possède des points périodiques dans  $K$ . La proposition est donc banale s'il existe un élément  $f$  dans  $\Gamma^1$  tel que l'homéomorphisme  $\phi(f)$  de  $S_K^1$  n'est pas topologiquement conjugué à une rotation d'ordre fini. Cependant, le premier exemple du §3.5 montre qu'il existe des groupes engendrés par des éléments d'ordre fini et qui préservent un ensemble minimal exceptionnel.

Pour la preuve de la proposition nous montrerons que sous nos hypothèses, l'action du groupe  $\phi(\Gamma)$  sur  $S_K^1$  n'est pas conjuguée à celle d'un groupe de rotations. Le lemme précédent permet dans ce cas d'obtenir la conclusion.

Remarquons d'abord que l'ensemble  $\phi(\Gamma^1)$  engendre  $\phi(\Gamma)$ . Néanmoins, les éléments de  $\phi(\Gamma^1)$  ne sont pas nécessairement différents. On choisit un ensemble d'indices  $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$  tel que  $\phi(f_i) \neq \phi(f_j)$  pour  $i \neq j$  dans  $\mathcal{J}$ , et tel que les  $\phi(f_j)$ ,  $j \in \mathcal{J}$ , engendrent  $\phi(\Gamma)$ .

Supposons que  $\mathcal{J}$  soit fini, disons  $\mathcal{J} = \{1, \dots, n\}$ , et que  $\phi(\Gamma)$  soit conjugué à un groupe de rotations. Alors chaque orbite dans  $S_K^1$  pour l'action  $\phi(\Gamma)$  est finie, de la forme

$$\text{orb}_{\phi(\Gamma)}(x) = \{\phi(f_{j_1}^{m_1} f_{j_2}^{m_2} \dots f_{j_n}^{m_n})(x)\}, \quad 0 \leq m_k < n_k,$$

où  $n_k$  est l'ordre de  $\phi(f_{j_k})$  (rappelons que le nombre de rotation de chaque  $f_j$  est rationnel). Cependant, ceci contredit le fait que les orbites par  $\phi(\Gamma)$  sont denses dans  $S_K^1$ .

Supposons maintenant que  $\mathcal{J}$  soit infini et que  $\phi(\Gamma)$  soit conjugué à un groupe de rotations. Alors les intervalles  $f_j(I)$ ,  $j \in \mathcal{J}$ , sont deux à deux disjoints. Prenons une suite  $(j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |f_{j_k}(I)| = 0. \quad (19)$$

Notons que pour chaque  $k \in \mathbb{N}$  il existe une composante connexe  $]c_k, d_k[$  de  $S^1 - K$  telle que  $|f_{j_k}(]c_k, d_k[)| \geq |]c_k, d_k[|$  (on peut considérer, par exemple, une composante connexe  $J$  de  $S^1 - K$  de longueur maximale et définir  $]c_k, d_k[ = f_{j_k}^{-1}(J)$ ). D'après l'inégalité (5) on obtient

$$\frac{|f_{j_k}(I)|}{|I|} \geq e^{-W(f_{j_k})} \frac{|f_{j_k}(]c_k, d_k[)|}{|]c_k, d_k[|} \geq e^{-C},$$

ce qui contredit (19) pour  $k$  assez grand. □

**Remarque 3.4.** Pour référence future, nous dirons qu'un sous-groupe de  $\text{Diff}_+^{\log}(S^1)$  engendré par une famille  $\Gamma^1 = \{f_i : i \in \mathcal{I}\}$  qui vérifie  $\sup\{W(f_i) : f_i \in \Gamma^1\} < \infty$  est *engendré à distorsion finie*.

La preuve du théorème C devient maintenant facile. En effet, puisque le difféomorphisme  $g \in \Gamma^2 \cup \Gamma^4$  est analytique réel et n'est pas d'ordre fini, ses points périodiques sont isolés. D'autre part, on a  $W(g) \leq 4\lambda$ . On peut ainsi appliquer le théorème B en considérant  $\Gamma^1 \cup \{g\}$  comme partie génératrice de  $\Gamma$ .

### 3.4 Une idée pour le cas général

Pour essayer d'obtenir une version générale du théorème B, il est raisonnable d'essayer d'améliorer le lemme 3.2. La question suivante devient ainsi naturelle.

**Question** Existe-t-il une constante  $N \in \mathbb{N}$  telle que pour tout sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{Homéo}_+(S^1)$  non semiconjugué à un groupe de rotations et sans orbite finie, pour tout système de générateurs  $\Gamma^1$  de  $\Gamma$ , et pour tout point  $p \in S^1$ , il existe au moins un élément  $f \in \Gamma^N$  tel que  $p$  n'est pas périodique pour  $f$  ?

Dans la suite, nous montrerons qu'une réponse affirmative à cette question permettrait de démontrer le théorème B en supprimant l'hypothèse de points périodiques isolés pour l'un des générateurs. En effet, supposons que  $\Gamma$  soit un sous groupe de  $\text{Diff}_+^{\log}(S^1)$  qui préserve un minimal exceptionnel  $K$  et qui est engendré par une famille de difféomorphismes proches des rotations. En admettant une réponse affirmative à la question ci-dessus pour le sous-groupe  $\phi(\Gamma)$  de  $\text{Homéo}_+(S_K^1)$  (voir les commentaires avant la proposition 3.3), posons

$$L = \sup \{ |[a, b]| : a, b \cap K \neq \emptyset \text{ et il existe } h \in \Gamma^N \text{ tel que } \text{Per}(h) \cap [a, b] = \{a, b\} \}.$$

Fixons un élément  $\bar{f} \in \Gamma^N$  et un intervalle  $[a, b] \subset S^1$  de taille supérieure à  $L/2$  tels que  $\text{Per}(\bar{f}) \cap [a, b] = \{a, b\}$ . Fixons par ailleurs un élément  $\bar{g} \in \Gamma^N$  tel que  $a$  ne soit pas périodique pour  $\bar{g}$ , et notons  $u$  et  $v$  les points périodiques de  $\bar{g}$  à gauche et à droite de  $a$  respectivement. Remarquons que  $|[u, v]| \leq L$ , et donc  $|[a, b]|/|[u, v]| \geq 1/2$ . Remarquons aussi que si  $W(h) \leq \lambda$  pour tout  $h \in \Gamma^1$ , alors il existe des itérés  $f$  et  $g$  de  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  qui fixent  $[a, b]$  et  $[u, v]$  respectivement et tels que  $W(f; [a, b]) \leq N\lambda$  et  $W(g; [u, v]) \leq N\lambda$ . Quitte à remplacer  $f$  et  $g$  par leurs inverses, on peut supposer que  $f(x) > x$  pour tout  $x \in ]a, b[$  et  $g(x) < x$  pour tout  $x \in ]u, v[$ . Il peut se présenter deux cas.

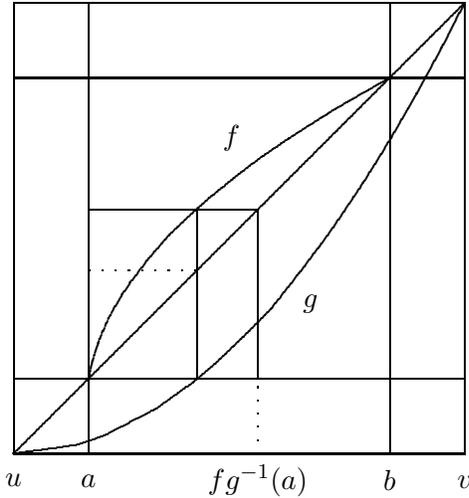


Figure 4 : premier cas

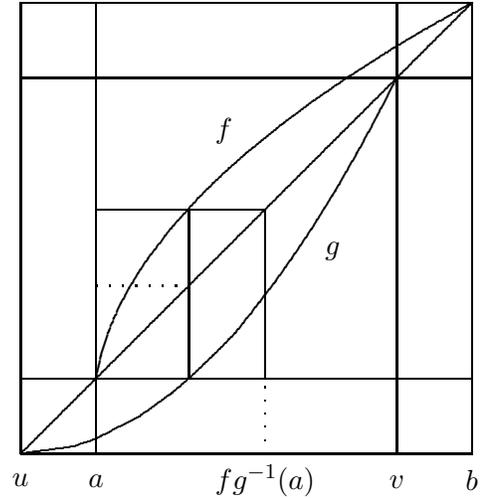


Figure 5 : deuxième cas

Premier cas : par rapport à l'orientation canonique du cercle on a  $u < a < b < v$ .

Puisque  $|[a, b]| \geq |[u, v]|/2$ , si  $\delta$  est suffisamment petit, alors  $f$  et  $g$  sont comme dans les lemmes de Duminy sur l'intervalle  $[a, fg^{-1}(a)]$  (voir la figure 4). Une application de ces lemmes (comme celle de la preuve du théorème B) donne une contradiction dès que  $\delta$  est plus petit qu'une certaine constante positive qui ne dépend que de  $N$ .

Deuxième cas : on a  $u < a < v \leq b$ .

Si  $\delta$  est suffisamment petit alors  $f$  et  $g$  sont comme dans les lemmes de Duminy sur l'intervalle  $[a, fg^{-1}(a)]$  (voir la figure 5). De nouveau, une application de ces lemmes donne la contradiction cherchée pour  $\lambda < \lambda(N)$  suffisamment petit.

Pour conclure ce paragraphe, signalons que si la réponse à la question posée précédemment était positive, alors on pourrait se débarrasser aussi de l'hypothèse de points fixes isolés pour l'un des générateurs dans les théorèmes D et E (dans ce dernier, il faudrait supposer néanmoins que les groupes en question ne sont pas abéliens). Pour aboutir à cela, il suffirait simplement d'introduire, au milieu des démonstrations de ces théorèmes, des idées analogues à celles qui ont été utilisées plus haut. Signalons cependant qu'une telle amélioration n'est envisageable qu'en classe  $C^2$ , et pas en classe  $C^{\log}$ . Ceci est dû à la nature des arguments qui seront donnés aux paragraphes suivants (dans ce sens, les propositions 4.3 et 6.9 imposent des contraintes).

### 3.5 Quelques exemples

Le groupe modulaire  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \langle g, h : g^3 = h^2 = id \rangle$  agit de manière naturelle sur le cercle avec des orbites denses. Cette action est obtenue en identifiant les générateurs  $g$  et  $h$  de ce groupe à deux isométries de type elliptique du disque de Poincaré, à savoir celle d'angle  $2\pi/3$  et centrée en un point  $O$  du disque, et celle d'angle  $\pi$  et centrée en un point  $O'$  à distance hyperbolique  $\log(\sqrt{3})$  de  $O$  respectivement. Si au lieu du point  $O'$  on considère un point  $O''$  du disque à distance hyperbolique de  $O$  plus grande que  $\log(\sqrt{3})$ , alors on obtient une action de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  avec un minimal exceptionnel (voir la figure 6). Remarquons que l'élément  $f = gh$  possède un unique point fixe sur  $S^1$ .

Dans la suite nous considérerons des versions "affines par morceaux" de l'exemple précédent, et puis nous faisons des petites perturbations de sorte que les applications ainsi obtenues deviennent différentiables. Par ce procédé nous montrerons que la constante  $\lambda_0$  optimale du théorème B ne peut pas être plus grande que  $4 \log((\sqrt{5} + 1)/2)$ . Signalons en passant que l'exemple original de R. Sacksteder a été construit en suivant cette idée (voir [28]). Par ailleurs, une conjecture de P. Dippolito stipule que tout groupe de difféomorphismes de classe  $C^\infty$  du cercle admettant un minimal exceptionnel devrait pouvoir être approché (en topologie  $C^0$ ) par un groupe d'homéomorphis-

mes affines par morceaux de  $S^1$  de sorte que la dynamique sur le Cantor minimal reste la même (à conjugaison topologique près). Dans l'appendice de [7] le lecteur trouvera une version plus précise de cette conjecture.

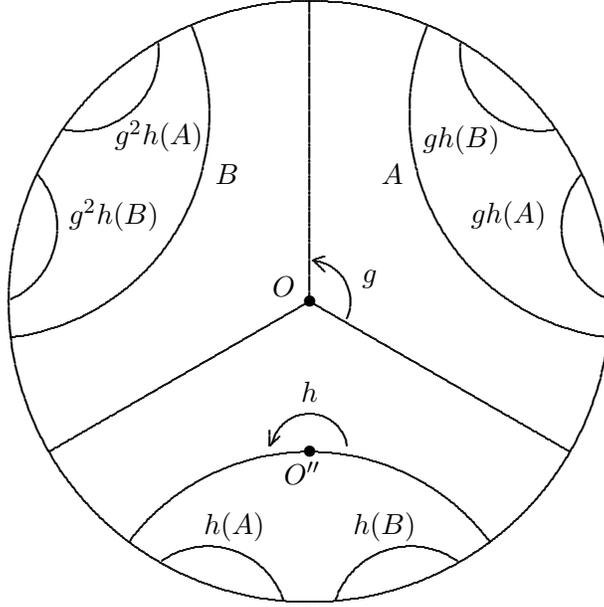


Figure 6

Pour illustrer l'idée générale, commençons par considérer le groupe des homéomorphismes affines par morceaux d'un cercle de longueur 3 engendré par les éléments  $\tilde{f}_0$  et  $\tilde{g}_0$  de la figure 7. Les orbites par l'action de ce groupe sont denses. De plus, bien que  $\tilde{f}_0$  ne soit pas un difféomorphisme, la variation totale du logarithme de sa dérivée est bien définie, égale à  $4 \log(2)$ . D'autre part, on a  $W(\tilde{g}_0) = 0$ .

Pour construire une action avec un minimal exceptionnel nous allons "éclater" l'orbite du point  $p = 1$ . Cette procédure consiste à remplacer chaque point de l'orbite par un petit intervalle (de sorte que la somme totale des longueurs soit finie), et puis d'étendre les applications originales de manière affine à ces intervalles. Il est facile de voir que par ce procédé on obtient un groupe conjugué au groupe  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$  qui est engendré par les homéomorphismes affines par morceaux  $\tilde{f}_\varepsilon$  et  $\tilde{g}_\varepsilon$  de la figure 8. Notons qu'on a  $W(\tilde{f}_\varepsilon) = 4 \log(2) + \tilde{w}(\varepsilon)$ , où  $\tilde{w}(\varepsilon)$  tend vers zéro lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Désignons par  $\tilde{I}_\varepsilon$  l'intervalle  $]1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2[$ . Le groupe  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$  agit en préservant un minimal

exceptionnel, à savoir

$$\tilde{K}_\varepsilon = S^1 - \bigcup_{h \in \tilde{\Gamma}_\varepsilon} h(\tilde{I}_\varepsilon).$$

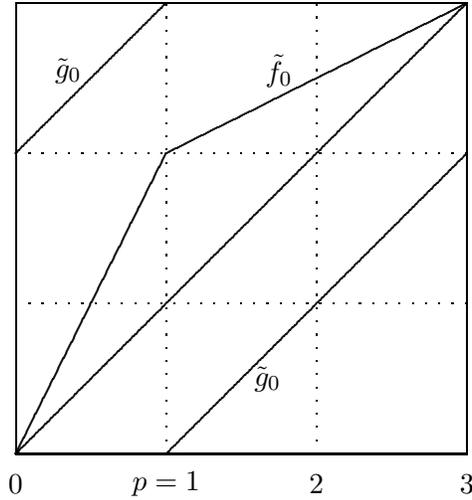


Figure 7

Pour obtenir l'estimée  $4 \log((\sqrt{5} + 1)/2)$  nous allons suivre un processus similaire, mais à partir d'une autre action. Pour simplifier, désignons par  $\Phi$  le nombre d'or.

Commençons par considérer le groupe  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$  engendré par les applications  $\bar{f}_\varepsilon$  et  $\bar{g}_\varepsilon$  de la figure 9. Ce groupe agit sur un cercle de longueur  $2 + 1/\Phi$  avec des orbites denses. De plus,  $W(\bar{f}_\varepsilon)$  et  $W(\bar{g}_\varepsilon)$  sont égales à  $4 \log(\Phi)$ .

Éclatons une nouvelle fois l'orbite du point  $p = 1$  pour obtenir ainsi une action conjuguée à celle donnée par un groupe (désigné par  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ ) qui est engendré par des homéomorphismes affines par morceaux  $\bar{f}_\varepsilon$  et  $\bar{g}_\varepsilon$  dont la dérivée (où elle est bien définie) est égale à  $\Phi + \varepsilon, (\Phi + \varepsilon)^{-1}$  ou 1, selon le point choisi. En particulier,  $W(\bar{f}_\varepsilon) = W(\bar{g}_\varepsilon) = 4 \log(\Phi) + \bar{w}(\varepsilon)$ , où  $\bar{w}(\varepsilon)$  tend vers zéro lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. Notons  $K_\varepsilon$  l'ensemble de Cantor minimal pour l'action de  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ , et notons  $I_\varepsilon$  la composante connexe de  $S^1 - K_\varepsilon$  qui correspond au point  $p$ .

Remplaçons maintenant  $\bar{f}_\varepsilon$  et  $\bar{g}_\varepsilon$  par des difféomorphismes lisses  $f_\varepsilon$  et  $g_\varepsilon$  dont les dérivées sont monotones sur  $I_\varepsilon \cup \bar{g}_\varepsilon(I_\varepsilon) \cup \bar{g}_\varepsilon^2(I_\varepsilon)$ , et qui leur sont respectivement identiques sur le complémentaire de cet ensemble. On a encore que  $W(f_\varepsilon)$  et  $W(g_\varepsilon)$  tendent vers  $4 \log(\Phi)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, et le groupe  $\Gamma_\varepsilon$  engendré par  $f_\varepsilon$  et  $g_\varepsilon$  a encore  $K_\varepsilon$  comme minimal exceptionnel.

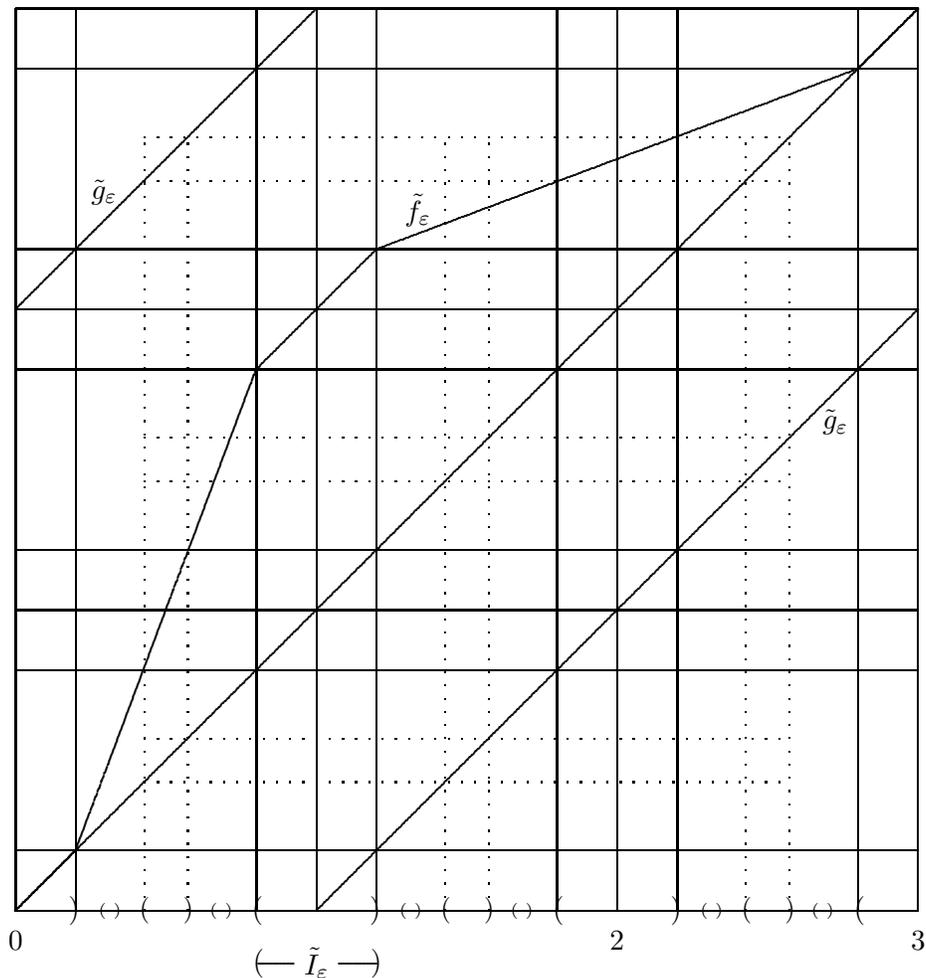


Figure 8

Puisque chaque  $f_\varepsilon$  possède exactement un point fixe, on conclut, d'après la construction précédente, que la meilleure constante  $\lambda_0$  pour le théorème B n'est pas plus grande que  $4 \log(\Phi)$ . D'autre part, pour une petite variation de cet exemple, le lemme de Duminy s'applique de manière optimale sur certains intervalles. Par cette raison, nous croyons raisonnable de penser que la meilleure constante du théorème pourrait être exactement égale à  $4 \log(\Phi)$ .

**Remarque 3.5.** Le lecteur aura noté que les arguments de la preuve du théorème B peuvent être appliqués (avec des légères modifications) pour démontrer que ce résultat reste valable pour des groupes d'homéomorphismes affines par morceaux du cercle. Puisque la dynamique combinatoire de ces groupes est relativement simple, il est envisageable d'obtenir dans ce contexte la constante

optimale du théorème. Une réponse affirmative (“en topologie  $C^{\log}$ ”) à la conjecture de Dippolito mentionnée précédemment montrerait alors que cette constante serait optimale même dans le cas général.

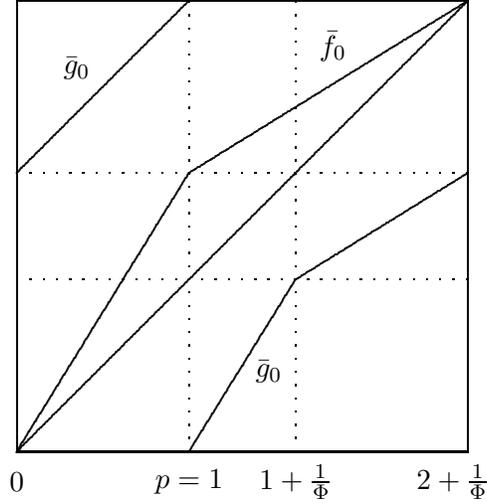


Figure 9

## 4 Ergodicité

### 4.1 Deux critères généraux

Rappelons que l’action de  $\Gamma$  sur  $S^1$  est *ergodique* (par rapport à la mesure de Lebesgue) si les sous-ensembles mesurables de  $S^1$  invariants par  $\Gamma$  ont une mesure nulle ou totale. Pour montrer que l’action d’un groupe sur le cercle à orbites denses est ergodique, deux principes sont plus au moins canoniques. Ils sont reliés aux idées d’équicontinuité et d’expansivité, mais au niveau différentiel. Une version du premier principe se traduit dans la proposition ci-dessous.

**Proposition 4.1.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Diff}_+^{\log}(S^1)$  dont les orbites sont denses et dont tout élément est d’ordre fini. Si  $\Gamma$  est engendré à distorsion finie, alors l’action de  $\Gamma$  est ergodique.*

**Preuve** D’abord, notons que  $\Gamma$  est conjugué à un groupe de rotations (de type non fini). Pour montrer cela on peut utiliser le lemme 3.2. De manière alternative, on pourrait utiliser le théorème de Hölder (voir la proposition 6.11 dans [11]). On note  $\text{ord}(f)$  l’ordre de l’élément  $f \in \Gamma$ .

Soit  $A \subset \mathbb{S}^1$  un ensemble mesurable invariant et de mesure positive. Nous montrerons que  $\text{Leb}(A) = 1$ . Soit  $p$  un point de densité de  $A$ . Il est facile de voir qu'il existe une suite  $(f_n)$  dans  $\Gamma^1$  et une suite d'intervalles de la forme  $I_n = [p - \varepsilon_n, p + \varepsilon_n)$  telles que  $\varepsilon_n$  tend vers zéro, et telles que  $I_n, f_n(I_n), \dots, f_n^{\text{ord}(f_n)-1}(I_n)$  sont deux à deux disjoints et recouvrent  $\mathbb{S}^1$ . Fixons  $\varepsilon > 0$  et prenons  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$\frac{\text{Leb}(I_n \cap (\mathbb{S}^1 - A))}{\text{Leb}(I_n)} \leq \varepsilon.$$

Soit  $C > 0$  une constante telle que  $W(f) \leq C$  pour tout  $f \in \Gamma^1$ . Notons que pour tout  $k < \text{ord}(f_n)$  on a

$$W(f_n^k; I_n) \leq \sum_{i=0}^{k-1} W(f_n; f_n^i(I_n)) \leq W(f_n) \leq C.$$

Ceci entraîne

$$\frac{\text{Leb}(f_n^k(I_n \cap (\mathbb{S}^1 - A)))}{\text{Leb}(f_n^k(I_n))} \leq \frac{\sup_{x \in I_n} (f_n^k)'(x)}{\inf_{x \in I_n} (f_n^k)'(x)} \frac{\text{Leb}(I_n \cap (\mathbb{S}^1 - A))}{\text{Leb}(I_n)} \leq e^C \varepsilon.$$

L'ensemble  $A$  étant  $f_n$ -invariant, à partir de cette inégalité on déduit aisément que

$$\text{Leb}(\mathbb{S}^1 - A) \leq e^C \varepsilon \text{Leb}(\mathbb{S}^1) = e^C \varepsilon.$$

Puisque ceci est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on conclut que  $\text{Leb}(\mathbb{S}^1 - A) = 0$ , et donc  $\text{Leb}(A) = 1$ . □

**Remarque 4.2.** Tout  $f \in \text{Diff}_+^{\log}(\mathbb{S}^1)$  avec nombre de rotation irrationnel agit de manière ergodique sur  $\mathbb{S}^1$ . La preuve de ce fait utilise une idée analogue à celle de la proposition précédente. Dans ce cas, on peut obtenir une sorte d'équicontinuité locale grâce à la connaissance, d'après la théorie du nombre de rotation de Poincaré, de la dynamique combinatoire du difféomorphisme (voir [15] ou [16] pour les détails). Comme une conséquence de ce fait et de la proposition précédente, on déduit que l'action sur le cercle de tout sous-groupe de  $\text{Diff}_+^{\log}(\mathbb{S}^1)$  topologiquement conjugué à un sous-groupe dense du groupe rotations et engendré à distorsion finie est ergodique.

Le deuxième principe d'ergodicité, contenu dans la proposition suivante, semble également bien connu. Néanmoins, il est difficile de donner une référence précise. Nous suivons essentiellement une idée qui se trouve dans [30]. Rappelons qu'on note  $\text{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S}^1)$  le groupe des difféomorphismes directs et de classe  $C^1$  du cercle dont la dérivée est Hölder continue d'exposant  $\alpha$ .

**Proposition 4.3.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S}^1)$  dont les orbites sont denses, avec  $\alpha > 0$ . Supposons que pour tout point  $p \in \mathbb{S}^1$  il existe un élément  $g \in \Gamma$  tel que  $g'(p) > 1$ . Alors l'action de  $\Gamma$  est ergodique.*

La preuve sera faite en plusieurs étapes. D'abord, notons que sous les hypothèses de la proposition, un argument simple de compacité donne l'existence d'un nombre fini d'éléments  $g_1, \dots, g_n$  dans  $\Gamma$ , d'une collection  $I_1, \dots, I_n$  d'intervalles ouverts de  $S^1$ , et de constantes  $\varepsilon_0 > 0$  et  $\tau > 1$ , tels que pour tout  $i = 1, \dots, n$  et tout  $x \in I_i$  on a  $g'_i(x) \geq \tau$ , et tels que pour tout point  $p \in S^1$  il existe  $I_i = I_{i(p)}$  (pas nécessairement unique) tel que  $[p - \varepsilon_0, p + \varepsilon_0] \subset I_i$ .

Pour  $p \in S^1$  fixé on note  $J_1 = I_{i(p)}$ ,  $h_0 = Id$ . On définit par récurrence  $h_k = g_{i_k} \circ h_{k-1}$ , où  $i_k = i(h_{k-1}(p))$ , et on définit  $J_k = I_{i_k}$ . Remarquons que  $h'_n(p) \geq \tau^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lemme 4.4.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que si  $n \in \mathbb{N}$  et  $\varepsilon > 0$  sont tels que  $J_{k+1}$  contient  $h_k([p - \varepsilon, p + \varepsilon])$  pour tout  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , alors on a  $h'_n(x)/h'_n(y) \leq C$  pour tout  $x, y \in ]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ .*

**Preuve** Notons d'abord que chaque  $g'_i|_{I_i}$  étant  $\alpha$ -Hölder continue et supérieure ou égale à  $\tau$ , il existe une constante  $\tilde{C} > 0$  telle que pour tout  $x, y \in I_i$  on a

$$|\log(g'_i(x)) - \log(g'_i(y))| \leq \tilde{C} \text{dist}^\alpha(x, y).$$

Donc, d'après l'hypothèse, pour tout  $k = 0, \dots, n-1$  et tout  $x, y \in ]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ , la valeur de  $|\log(g'_{i_{k+1}}(h_k(x))) - \log(g'_{i_{k+1}}(h_k(y)))|$  est inférieure ou égale à

$$\begin{aligned} \tilde{C} \text{dist}^\alpha(h_k(x), h_k(y)) &\leq \tilde{C} \tau^{-\alpha} \text{dist}^\alpha(g_{i_{k+1}}(h_k(x)), g_{i_{k+1}}(h_k(y))) = \tilde{C} \tau^{-\alpha} \text{dist}^\alpha(h_{k+1}(x), h_{k+1}(y)) \\ &\leq \dots \leq \tilde{C} \tau^{-\alpha(n-k)} \text{dist}^\alpha(h_n(x), h_n(y)) \leq \tilde{C} \tau^{-\alpha(n-k)}. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\log \left| \frac{h'_n(x)}{h'_n(y)} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\log(g'_{i_{k+1}}(h_k(x))) - \log(g'_{i_{k+1}}(h_k(y)))| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{C} \tau^{-\alpha(n-k)} \leq \tilde{C} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-\alpha k} = \frac{\tilde{C} \tau^\alpha}{\tau^\alpha - 1}.$$

Donc, pour  $C = \exp(\tilde{C} \tau^\alpha (\tau^\alpha - 1)^{-1})$  on a  $h'_n(x)/h'_n(y) \leq C$ . □

Le lemme suivant donne des conditions sous lesquelles les hypothèses du lemme précédent sont vérifiées.

**Lemme 4.5.** *Si  $\varepsilon < \varepsilon_0 / C h'_n(p)$  alors  $h_k$  envoie  $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$  dans  $J_k$  pour tout  $k = 0, \dots, n-1$ . De plus, l'intervalle  $]h_k(p) - h'_k(p)\varepsilon / C, h_k(p) + h'_k(p)\varepsilon / C[$  est contenu dans  $h_k([p - \varepsilon, p + \varepsilon])$  pour tout  $k = 0, \dots, n-1$ .*

**Preuve** Supposons le contraire et soit  $k < n$  le plus petit entier pour lequel  $h_k([p - \varepsilon, p + \varepsilon])$  n'est pas contenu dans  $J_k$ . Soit  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 / C h'_n(p)$  la plus petite constante pour laquelle on a soit  $h_k(p - \varepsilon_1) \notin J_k$  soit  $h_k(p + \varepsilon_1) \notin J_k$ . Le lemme précédent nous donne  $h'_k(x) \leq C h'_k(p)$  pour tout  $x \in [p - \varepsilon_1, p + \varepsilon_1]$ , et donc

$$h_k([p - \varepsilon_1, p + \varepsilon_1]) \subset ]h_k(p) - \varepsilon_1 C h'_k(p), h_k(p) + \varepsilon_1 C h'_k(p)[ \subset ]h_k(p) - \varepsilon_0, h_k(p) + \varepsilon_0[ \subset J_k,$$

ce qui est une contradiction. La preuve de la deuxième partie est analogue et nous la laissons au lecteur.  $\square$

**Preuve de la proposition 4.3** Soit  $A \subset S^1$  un ensemble mesurable  $\Gamma$ -invariant et de mesure positive. Nous montrerons que  $\text{Leb}(A) = 1$ . Pour cela, prenons un point de densité  $p$  de  $A$ . On considère la suite d'éléments  $(h_n)$  de  $\Gamma$  donnée par la construction précédente. Soit  $(h_{n_k})$  une sous-suite telle que  $h_{n_k}(p)$  converge vers un point  $q \in S^1$ . Pour chaque  $k \geq 1$  on fixe un nombre réel  $\varepsilon_k \in ]\varepsilon_0/2C h'_{n_k}(p), \varepsilon_0/C h'_{n_k}(p)[$ . D'après les lemmes précédents on a

$$\begin{aligned} \frac{\text{Leb}((S^1 - A) \cap ]p - \varepsilon_k, p + \varepsilon_k[)}{\text{Leb}(]p - \varepsilon_k, p + \varepsilon_k[)} &\geq \frac{\inf_{x \in ]p - \varepsilon_k, p + \varepsilon_k[} h'_{n_k}(x)}{\sup_{x \in ]p - \varepsilon_k, p + \varepsilon_k[} h'_{n_k}(x)} \frac{\text{Leb}((S^1 - A) \cap h_{n_k}(]p - \varepsilon_k, p + \varepsilon_k[))}{\text{Leb}(h_{n_k}(]p - \varepsilon_k, p + \varepsilon_k[))} \\ &\geq \frac{1}{C} \frac{\text{Leb}((S^1 - A) \cap ]h_{n_k}(p) - \varepsilon_k h'_{n_k}(p)/C, h_{n_k}(p) + \varepsilon_k h'_{n_k}(p)/C[)}{\text{Leb}(]h_{n_k}(p) - C\varepsilon_k h'_{n_k}(p), h_{n_k}(p) + C\varepsilon_k h'_{n_k}(p)[)} \\ &\geq \frac{1}{2C\varepsilon_0} \text{Leb}((S^1 - A) \cap ]h_{n_k}(p) - \varepsilon_0/2C^2, h_{n_k}(p) + \varepsilon_0/2C^2[). \end{aligned}$$

Puisque  $]q - \varepsilon_0/4C^2, q + \varepsilon_0/4C^2[$  est contenu dans  $]h_{n_k}(p) - \varepsilon_0/2C^2, h_{n_k}(p) + \varepsilon_0/2C^2[$  pour  $k$  assez grand, on déduit que

$$\text{Leb}((S^1 - A) \cap ]q - \varepsilon_0/4C^2, q + \varepsilon_0/4C^2[) \leq 2C\varepsilon_0 \frac{\text{Leb}((S^1 - A) \cap ]p - \varepsilon_k, p + \varepsilon_k[)}{\text{Leb}(]p - \varepsilon_k, p + \varepsilon_k[)} \quad (20)$$

pour  $k$  grand. On sait que  $\varepsilon_k$  tend vers zéro lorsque  $k$  tend vers l'infini. Donc,  $p$  étant un point de densité de  $A$ , on conclut d'après (20) que

$$\text{Leb}((S^1 - A) \cap ]q - \varepsilon_0/4C^2, q + \varepsilon_0/4C^2[) = 0.$$

Comme les orbites de  $\Gamma$  sont denses, on obtient  $\text{Leb}(S^1 - A) = 0$ , et donc  $\text{Leb}(A) = 1$ .  $\square$

**Remarque 4.6.** Il n'est pas difficile de modifier la preuve précédente pour démontrer le résultat suivant : si  $\alpha > 0$  et si  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Diff}_+^{1+\alpha}(S^1)$  qui admet un minimal exceptionnel  $K$  de sorte que pour tout point  $p \in K$  il existe un élément  $g \in \Gamma$  vérifiant  $g'(p) > 1$ , alors la mesure de Lebesgue de  $K$  est nulle. Ce fait est très intéressant, car le problème de savoir si des ensembles de Cantor minimaux de mesure positive peuvent apparaître pour des sous-groupes de type fini de  $\text{Diff}_+^2(S^1)$  est ouvert.

## 4.2 Preuve de l'ergodicité

Pour démontrer le théorème D, fixons d'abord le générateur  $g \in \Gamma^1$  à points périodiques isolés donné par l'hypothèse. Notons  $k$  l'ordre de ces points périodiques et posons  $G = g^k$ . Un argument analogue à celui du début de la preuve du théorème B montre qu'il existe  $F \in \Gamma$  et un intervalle  $[a, b']$  de  $S^1$  tels que  $F$  et  $G$  (ou éventuellement  $G^{-1}$ ) sont comme dans les lemmes de Duminy sur l'intervalle  $[a, b']$  et vérifient  $W(F; [a, b']) < 3\delta_0/(1 - \delta_0)$  et  $W(G; [a, b']) < \delta_0/(1 - \delta_0)$ . Nous considérerons une petite perturbation de cet intervalle, de sorte que l'application de retour induite ait un nombre fini de branches (voir la figure 10).

Pour  $\varepsilon > 0$  notons  $a' = a + \varepsilon$ . Soient  $c = G^{-1}(a')$  et  $b = F(c)$ . Par rapport à la notation (10), il n'est pas difficile de vérifier que  $m(F, G)$  tend vers 1 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. En utilisant le lemme 2.3 on montre que si  $\delta_0 < 0.165$  et  $\varepsilon$  est suffisamment petit, alors chaque branche d'un itéré suffisamment grand de l'application de retour induite  $\psi : [c, b] \rightarrow [c, b]$  est dilatante (remarquons que la constante 0.165 est la même qui apparaît dans la preuve du théorème A).

Puisque les orbites de  $\Gamma$  sont denses, il existe une famille finie d'intervalles  $I_1, \dots, I_n$  qui recouvrent  $S^1$ , et une famille  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n$  d'éléments de  $\Gamma$ , tels que  $\bar{g}_i(x) \in [c, b]$  pour tout  $x \in I_i$  et tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Soit  $M = \inf\{\bar{g}'_i(x) : x \in I_i, 1 \leq i \leq n\}$ , et soit  $N$  un entier suffisamment grand de sorte que chaque branche de  $\psi^N$  soit  $1/M$ -dilatante. Pour  $g_i = \psi^N \circ \bar{g}_i \in \Gamma$  on a  $g'_i(x) > 1$  pour tout  $x \in I_i$  (si  $x$  est tel que  $\bar{g}_i(x)$  n'est pas un point de continuité de  $\psi^N$ , alors on peut considérer l'une quelconque des branches de  $\psi^N$  dont l'adhérence du domaine de définition contient  $x$ ). Ainsi, pour obtenir l'ergodicité, on peut appliquer le principe d'expansivité de la proposition 4.3.

**Remarque 4.7.** Notons que la perturbation de l'intervalle  $[a, b']$  a été prise de sorte à obtenir une application de retour bien définie aux extrémités, ce qui permet d'appliquer la proposition 4.3.

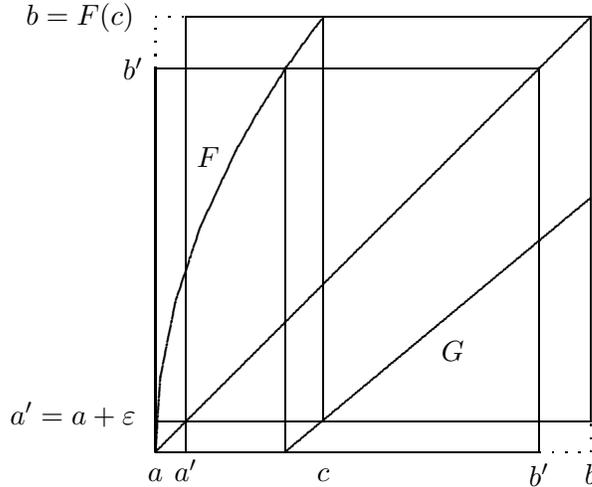


Figure 10

## 5 Rigidité

Dans ce paragraphe nous donnons la démonstration du théorème E pour la constante  $\delta_1 = 0.062$ . Désignons par  $g$  le générateur à points périodiques isolés du groupe  $\Gamma_1$  donné par l'hypothèse, et notons  $\delta = \sup\{\|h''\| : h \in \Gamma^1\}$  et  $\lambda = \delta/(1 - \delta)$ . Comme dans la preuve du théorème D, il est facile de montrer que si  $\lambda < \log(1.46557) \sim 0.382$ , alors à partir de  $g$  on peut construire deux éléments  $F_1$  et  $G_1$  de  $\Gamma_1$  qui sont reliés comme dans les lemmes de Duminy sur un intervalle  $[a, b']$  de  $S^1$ , et qui de plus vérifient  $W(F_1; [a, b']) < 3\lambda$  et  $W(G; [a, b']) < \lambda$ . Pour chaque  $\varepsilon > 0$  notons  $a'_{\varepsilon,1} = a + \varepsilon$ ,  $c_{\varepsilon,1} = G_1^{-1}(a_{\varepsilon,1})$ ,  $b_{\varepsilon,1} = F_1(c_{\varepsilon,1})$ .

**Lemme 5.1.** *Si la constante  $\varepsilon > 0$  est assez petite, alors chaque branche de l'application de premier retour  $\psi_1 : [c_{\varepsilon,1}, b_{\varepsilon,1}] \rightarrow [c_{\varepsilon,1}, b_{\varepsilon,1}]$  induite par  $F_1$  et  $G_1$  est 2-dilatante.*

**Preuve** Pour  $\varepsilon > 0$  petit notons, comme dans (10),

$$m(F_1, G_1) = \frac{b_{\varepsilon,1} - G_1^{-1}(a_{\varepsilon,1})}{F_1(G_1^{-1}(a_{\varepsilon,1})) - c_{\varepsilon,1}}, \quad M(F_1) = \frac{\sup_{x \in [c_{\varepsilon,1}, b_{\varepsilon,1}]} (x - F_1^{-1}(x))}{\inf_{x \in [c_{\varepsilon,1}, b_{\varepsilon,1}]} (x - F_1^{-1}(x))}.$$

D'après la remarque 2.4, il faut vérifier que

$$M(F_1) m(F_1, G_1) \left( 1 - \frac{1}{\sup_{x \in [a, c_{\varepsilon,1}]} F_1'(x)} \right) e^{W(F_1; [a, c_{\varepsilon,1}]) + W(G_1; [c_{\varepsilon,1}, b_{\varepsilon,1}])} < \frac{1}{2}$$

pour  $\varepsilon$  assez petit. Puisque  $m(F_1, G_1)$  tend vers 1 lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, ceci revient à montrer que

$$M(F_1) \left( 1 - \frac{1}{\sup_{x \in [a, c_{\varepsilon,1}]} F_1'(x)} \right) e^{W(F_1; [a, c_{\varepsilon,1}]) + W(G; [c_{\varepsilon,1}, b_{\varepsilon,1}])} < \frac{1}{2}. \quad (21)$$

Remarquons que d'après la construction de  $F_1$  et  $G_1$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit,

$$\begin{aligned} W(F_1, [a, c_{\varepsilon,1}]) &< 3\lambda, & W(G_1, [c_{\varepsilon,1}, b_{\varepsilon,1}]) &< \lambda, \\ \inf_{x \in [a, c_{\varepsilon,1}]} F_1'(x) &> e^{-3\lambda}, & \sup_{x \in [a, c_{\varepsilon,1}]} F_1'(x) &< e^{3\lambda}. \end{aligned}$$

Pour  $x \in [c_{\varepsilon,1}, b_{\varepsilon,1}]$  on a

$$F_1^{-1}(x) = F_1^{-1}(c_{\varepsilon,1}) + (x - c_{\varepsilon,1})(F_1^{-1})'(p)$$

pour un point  $p \in [c_{\varepsilon,1}, x]$  qui dépend de  $x$  et  $c_{\varepsilon,1}$ . On obtient ainsi

$$x - F_1^{-1}(x) = c_{\varepsilon,1} - F_1^{-1}(c_{\varepsilon,1}) + (x - c_{\varepsilon,1})(1 - (F_1^{-1})'(p)),$$

et donc

$$\frac{x - F_1^{-1}(x)}{c_{\varepsilon,1} - F_1^{-1}(c_{\varepsilon,1})} \leq 1 + \frac{x - c_{\varepsilon,1}}{c_{\varepsilon,1} - F_1^{-1}(c_{\varepsilon,1})} (1 - e^{-3\lambda}).$$

Notons que

$$\frac{x - c_{\varepsilon,1}}{c_{\varepsilon,1} - F_1^{-1}(c_{\varepsilon,1})} \leq \frac{b_{\varepsilon,1} - c_{\varepsilon,1}}{F_1^{-1}(b_{\varepsilon,1}) - F_1^{-1}(c_{\varepsilon,1})} < e^{3\lambda}. \quad (22)$$

À partir de cette inégalité on obtient

$$\frac{x - F_1^{-1}(x)}{c_{\varepsilon,1} - F_1^{-1}(c_{\varepsilon,1})} < 1 + e^{3\lambda}(1 - e^{-3\lambda}) = e^{3\lambda}. \quad (23)$$

De manière analogue,

$$\frac{x - F_1^{-1}(x)}{c_{\varepsilon,1} - F_1^{-1}(c_{\varepsilon,1})} \geq 1 - \frac{x - c_{\varepsilon,1}}{c_{\varepsilon,1} - F_1^{-1}(c_{\varepsilon,1})} (e^{3\lambda} - 1),$$

et d'après (22) on obtient

$$\frac{x - F_1^{-1}(x)}{c_{\varepsilon,1} - F_1^{-1}(c_{\varepsilon,1})} > 1 - e^{3\lambda}(e^{3\lambda} - 1). \quad (24)$$

D'après (23) et (24) on conclut

$$M(F_1) < \frac{e^{3\lambda}}{1 - e^{3\lambda}(e^{3\lambda} - 1)}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} M(F_1) \left( 1 - \frac{1}{\sup_{x \in [a, c_{\varepsilon,1}]} F_1'(x)} \right) e^{W(F_1; [a, c_{\varepsilon,1}]) + W(G_1; [c_{\varepsilon,1}, b_{\varepsilon,1}])} &< \frac{e^{3\lambda}}{1 - e^{3\lambda}(e^{3\lambda} - 1)} (1 - e^{-3\lambda}) e^{4\lambda} \\ &= \frac{e^{7\lambda}(e^{3\lambda} - 1)}{1 - e^{3\lambda}(e^{3\lambda} - 1)}, \end{aligned}$$

et il est facile de vérifier que le membre de droite de cette inégalité est inférieur ou égal à  $1/2$  pour  $\lambda \leq \log(1.07) \sim 0.067$ , c'est-à-dire pour  $\delta \leq 0.062$ .

□

On note maintenant  $a_{\varepsilon,2} = \varphi(a_{\varepsilon,1})$ ,  $a'_{\varepsilon,2} = \varphi(a'_{\varepsilon,1})$ ,  $b_{\varepsilon,2} = \varphi(b_{\varepsilon,1})$ ,  $c_{\varepsilon,2} = \varphi(c_{\varepsilon,1})$ ,  $F_2 = \varphi \circ F_1 \circ \varphi^{-1}$  et  $G_2 = \varphi \circ G_1 \circ \varphi^{-1}$ . L'application de retour  $\psi_2 : [c_{\varepsilon,2}, b_{\varepsilon,2}] \rightarrow [c_{\varepsilon,2}, b_{\varepsilon,2}]$  induite par  $F_2$  et  $G_2$  vérifie alors  $\psi_2 = \varphi \circ \psi_1 \circ \varphi^{-1}$ . Les branches de cette application sont elles aussi 2-dilatantes pour  $\varepsilon > 0$

assez petit. De plus, le nombre de ces branches est fini et tend vers l'infini lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro (toujours avec  $\varepsilon > 0$ ).

Pour  $\varepsilon > 0$  petit, nous avons alors que  $\varphi : [c_{\varepsilon,1}, b_{\varepsilon,1}] \rightarrow [c_{\varepsilon,2}, b_{\varepsilon,2}]$  est un homéomorphisme absolument continu qui conjugue les applications  $\psi_1$  et  $\psi_2$ . Ces applications vérifient les propriétés (25) et (26) du deuxième appendice. Le théorème 6.11 de cet appendice montre que la restriction de  $\varphi$  à l'intervalle  $]c_{\varepsilon,1}, b_{\varepsilon,1}[$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$ .

Remarquons maintenant que d'après l'égalité  $f_{i,2} \circ \varphi = \varphi \circ f_{i,1}$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , on voit que l'ensemble des points de  $S^1$  au voisinage desquels  $\varphi$  est un difféomorphisme local de classe  $C^r$  est  $\Gamma_1$ -invariant. Puisque les orbites par  $\Gamma_1$  sont denses,  $\varphi$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$  du cercle sur lui-même.

## 6 Appendice

### 6.1 Groupes libres d'homéomorphismes du cercle : un théorème de Margulis

En réponse à une question posée par É. Ghys, G. Margulis a démontré le théorème suivant (voir [11] et [21]).

**Théorème [G. Margulis]** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Homeo}_+(S^1)$ . Si  $\Gamma$  ne préserve aucune mesure de probabilité sur  $S^1$ , alors  $\Gamma$  contient un groupe libre à deux générateurs.*

Il est très instructif de lire la preuve de ce théorème, car elle contient quelques faits généraux sur la structure des actions des groupes par homéomorphismes du cercle. Nous donnerons dans la suite les idées essentielles de la démonstration.

**Définition 6.1.** On dit que l'action sur le cercle d'un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{Homeo}_+(S^1)$  est *équicontinue* si pour tout  $0 < \varepsilon < 1/2$  il existe  $0 < \varepsilon' < 1/2$  tel que si  $\text{dist}(x, y) < \varepsilon'$  alors  $\text{dist}(g(x), g(y)) < \varepsilon$  pour tout  $g \in \Gamma$ .

**Définition 6.2.** On dit que l'action sur le cercle d'un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{Homeo}_+(S^1)$  est *contractive* s'il existe  $0 < \varepsilon < 1/2$  tel que pour tout  $x, y \in S^1$  satisfaisant  $\text{dist}(x, y) < \varepsilon$ , il existe une suite  $(g_n)$  dans  $\Gamma$  telle que  $\text{dist}(g_n(x), g_n(y))$  tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Supposons que l'action sur le cercle d'un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{Homeo}_+(S^1)$  soit équicontinue. D'après le théorème d'Ascoli, la fermeture  $\overline{\Gamma}$  de  $\Gamma$  dans  $\text{Homeo}_+(S^1)$  est compacte. On peut alors définir une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $S^1$  par

$$\mu(A) = \int_{\overline{\Gamma}} \text{Leb}(g(A)) dg,$$

où  $dg$  désigne la mesure de Haar sur  $\overline{\Gamma}$  et  $A \subset S^1$  est Lebesgue mesurable. La mesure  $\mu$  est invariante par l'action de  $\Gamma$  sur  $S^1$ . De plus,  $\mu$  ne possède pas d'atome et son support est total (on a  $\mu(A) > 0$  pour tout ensemble mesurable  $A$  d'intérieur non vide). En utilisant  $\mu$  on peut reparamétriser le cercle de façon à conjuguer  $\Gamma$  à un groupe de rotations. On a alors la proposition suivante.

**Proposition 6.3.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Homéo}_+(S^1)$ . Si l'action de  $\Gamma$  sur  $S^1$  est équicontinue, alors  $\Gamma$  est topologiquement conjugué à un groupe de rotations.*

Le cas contractif c'est le cœur de [21]. Dans cet article, en utilisant le lemme du ping-pong de Klein (voir [14]), G. Margulis démontre le résultat suivant.

**Proposition 6.4.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Homéo}_+(S^1)$ . Si l'action de  $\Gamma$  sur  $S^1$  est contractive et toutes les orbites sont denses, alors  $\Gamma$  contient un sous-groupe libre à deux générateurs.*

À partir de ces propositions il n'est pas difficile de finir la preuve du théorème de Margulis. En effet, voyons les trois possibilités données par la propriété de trichotomie. S'il existe une orbite finie alors il y a une mesure de probabilité sur  $S^1$  invariante par  $\Gamma$ , à savoir la moyenne des masses Dirac concentrées sur les points de cette orbite. Si toutes les orbites sont denses alors il n'est pas difficile de montrer que l'action de  $\Gamma$  est équicontinue ou contractive. On peut donc utiliser la proposition 6.3 ou 6.4, selon le cas. Supposons finalement qu'il existe un Cantor minimal  $K$ . On remplace par un point chaque composante connexe de  $S^1 - K$  pour obtenir un cercle topologique  $S^1_K$ . Sur ce cercle, le groupe  $\Gamma$  agit de manière naturelle par homéomorphismes, et les orbites de cette action sont denses. On est alors ramené au cas où les orbites sont denses, pour lequel on a déjà démontré le théorème.

Notons aussi que des résultats précédents, on obtient directement la proposition suivante.

**Proposition 6.5.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe commutatif de  $\text{Homéo}_+(S^1)$ . Si les orbites de  $\Gamma$  sont denses, alors  $\Gamma$  est topologiquement conjugué à un groupe de rotations.*

Cette proposition reste vraie pour des sous-groupes moyennables de  $\text{Homéo}_+(S^1)$ . Remarquons que pour la démonstration il n'est pas nécessaire d'utiliser le théorème de Margulis en toute sa puissance. En effet, si  $\Gamma$  est un sous-groupe moyennable de  $\text{Homéo}_+(S^1)$ , alors il préserve une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $S^1$ . Si les orbites par  $\Gamma$  sont denses, alors  $\mu$  est sans atome et son support est total. En reparamétrisant le cercle, on obtient que  $\Gamma$  est conjugué à un groupe de rotations.

Comme application de cet ensemble d'idées, nous démontrons maintenant un résultat annoncé dans l'introduction de cet article.

**Théorème 6.6.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de type fini de  $\text{Diff}_+^{\log}(S^1)$ . Si  $\Gamma$  admet un minimal exceptionnel alors il contient un sous-groupe libre à deux générateurs.*

**Preuve** On démontrera que  $\Gamma$  agit de façon contractive sur le cercle topologique  $S_K^1$  obtenu en remplaçant chaque intervalle du complémentaire de  $K$  par un point, comme ce qui a été fait pour la preuve du théorème de Margulis. Le théorème découlera donc de la proposition 6.4.

Supposons que l'action (minimale) de  $\Gamma$  sur  $S_K^1$  ne soit pas contractive. Alors elle est équicontinue, et il existe une mesure invariante sans atomes et de support total qui permet de conjuguer l'action de  $\Gamma$  sur  $S_K^1$  à une action par des rotations. Soit  $\{f_1, \dots, f_n\}$  un ensemble de générateurs de  $\Gamma$ . Si chaque  $f_i$  agissant sur  $S_K^1$  est d'ordre fini alors chaque orbite dans  $S_K^1$  est finie, ce qui contredit la minimalité de  $K$ . D'autre part, si l'un des  $f_i$  n'est pas d'ordre fini sur  $S_K^1$ , alors le nombre de rotation de ce  $f_i$  (vu comme difféomorphisme de classe  $C^{\log}$  de  $S^1$ ) est irrationnel. Comme  $f_i$  a des orbites non partout denses (celles contenues dans  $K$ ), ceci contredit le théorème de Denjoy. □

**Remarque 6.7.** Pour des sous-groupes de type fini de  $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ , on dispose d'un résultat plus fort : si  $\Gamma$  est un tel groupe qui admet un minimal exceptionnel, alors il contient un sous-groupe libre d'indice fini (voir [9]).

L'hypothèse suivant laquelle  $\Gamma$  est de type fini dans le théorème 6.6 est bien nécessaire. En effet, d'après une construction d'un feuilletage de codimension 1 de  $M$ . Hirsch, on peut obtenir une action de  $\mathbb{Z}[1/2]$  par difféomorphismes analytiques réels de  $S^1$  qui admet un minimal exceptionnel (voir [17]).

Néanmoins, le théorème reste valable pour des groupes engendrés à distorsion finie (notons en passant qu'un phénomène analogue se produit pour le théorème de R. Sacksteder). Pour montrer cela, il suffit de montrer de nouveau que l'action de  $\Gamma$  sur  $S_K^1$  est contractive. Sinon cette action est équicontinue, et donc conjuguée à une action par des rotations. Cependant, ceci contredit la proposition 3.3.

## 6.2 Un théorème de conjugaison différentiable

Une application  $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est de classe  $C^{\log}$  par morceaux s'il existe une partition finie  $0 = p^0 < p^1 < \dots < p^k = 1$  de  $[0, 1]$  telle que la restriction de  $\psi$  à chaque intervalle  $[p^i, p^{i+1}]$  s'étend en une application de classe  $C^{\log}$  à  $[p^i, p^{i+1}]$  pour tout  $i = 0, \dots, k-1$ . L'application  $\psi$  est *dilatante par morceaux* s'il existe une constante  $\tau > 1$  telle que  $\psi'(x) > \tau$  pour tout point  $x \in [p^i, p^{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ .

On dit que  $\psi$  est *topologiquement transitive* (resp. *topologiquement mélangeante*) si pour toute paire d'ouverts non vides  $A$  et  $B$  dans  $[0, 1]$  il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\psi^n(A) \cap B$  est non vide (resp. il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\psi^n(A) \cap B$  est non vide pour tout  $n \geq n_0$ ). Une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $[0, 1]$  est *invariante* par  $\psi$  si  $\mu(\psi^{-1}(A)) = \mu(A)$  pour tout ensemble  $\mu$ -mesurable  $A \subset [0, 1]$ . Le théorème suivant, dû à A. Lasota et J. Yorke, est déjà classique (voir [19] et [20]).

**Théorème 6.8.** *Soit  $\psi$  une application dilatante par morceaux de l'intervalle unité. Il existe une mesure de probabilité sur  $[0, 1]$  invariante par  $\psi$ , absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et dont la fonction densité est à variation bornée. De plus, si  $\psi$  est topologiquement transitive, alors la mesure de probabilité invariante absolument continue est unique, et si  $\psi$  est topologiquement mélangeante, alors cette fonction densité  $\varrho$  satisfait les inégalités  $1/C \leq \varrho \leq C$  pour une certaine constante  $C > 0$ .*

Avant d'énoncer un autre résultat connu dont nous aurons besoin, on fixe quelques notations. Pour  $r \geq 1$  on note  $\mathcal{G}_+^r(\mathbb{R}, 0)$  le groupe des germes en 0 de difféomorphismes locaux de classe  $C^r$  de  $\mathbb{R}$  qui fixent 0 et préservent l'orientation. On note  $\mathcal{G}_+(\mathbb{R}, 0)$  le groupe des germes en 0 d'homéomorphismes locaux de  $[0, \infty[$  qui fixent 0 et qui sont différentiables (à droite) en 0. Pour  $r \geq 1$  on définit  $\mathcal{G}_*^r(\mathbb{R}, 0)$  comme étant le groupe des germes en 0 de difféomorphismes locaux de classe  $C^r$  de  $[0, \infty[$  qui fixent 0. Notons qu'il existe une projection naturelle de  $\mathcal{G}_+^r(\mathbb{R}, 0)$  sur  $\mathcal{G}_*^r(\mathbb{R}, 0)$ . On dit qu'un germe  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}_+^r(\mathbb{R}, 0)$  est *hyperbolique* si  $\gamma'(0) \neq 1$ .

Le résultat suivant est une formulation plus précise du corollaire 2.2 de [13]. Bien que la preuve soit la même, la forme ci-dessous est plus adaptée à notre situation. Nous refaisons la démonstration pour la commodité du lecteur.

**Proposition 6.9.** *Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux germes hyperboliques dans  $\mathcal{G}_+^r(\mathbb{R}, 0)$ , avec  $2 \leq r \leq \omega$ . Si  $\varphi$  est un germe dans  $\mathcal{G}_+(\mathbb{R}, 0)$  qui conjugue  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  en tant qu'éléments de  $\mathcal{G}_*^r(\mathbb{R}, 0)$ , alors  $\varphi$  appartient à  $\mathcal{G}_*^r(\mathbb{R}, 0)$ .*

**Preuve** Supposons d'abord que  $2 \leq r \leq \infty$ . Soit  $\lambda = \gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ . Quitte à changer les  $\gamma_i$  par leurs inverses, on peut supposer que  $\lambda < 1$ . D'après le théorème de linéarisation de Sternberg (voir [31] et aussi l'appendice de [32]), il existe  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  dans  $\mathcal{G}_+^r(\mathbb{R}, 0)$  tels que pour  $i = 1, 2$ , le germe de  $\varphi_i \circ \gamma_i \circ \varphi_i^{-1}$  à l'origine est égal à celui de l'application  $x \mapsto \lambda x$ . On peut donc supposer que  $\varphi$  conjugue ce dernier germe avec lui même, ce qui revient à dire que pour tout  $x \geq 0$  suffisamment petit on a  $\varphi(\lambda x) = \lambda x$ . Ceci entraîne que  $\varphi(x) = \varphi(\lambda^n x)/\lambda^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Notons que pour  $x > 0$  cette dernière expression converge vers  $\varphi'(0)x$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ainsi, l'élément  $\varphi \in \mathcal{G}_+(\mathbb{R}, 0)$  coïncide avec le germe de l'application linéaire  $x \mapsto \varphi'(0)x$  (vu comme un élément de  $\mathcal{G}_+(\mathbb{R}, 0)$ ). Ceci finit la preuve dans le cas où  $2 \leq r \leq \infty$ . Si  $r = \omega$  alors on reprend les arguments précédents en utilisant le théorème de linéarisation de Koenigs au lieu de celui de Sternberg (voir [5], page 31). □

Dans la suite, on considérera des applications  $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dilatantes par morceaux, dont le nombre de branches est au moins trois, et qui vérifient (voir la figure 11) :

$$\psi'(x) > 2 \text{ pour tout } x \in [p^i, p^{i+1}], \quad i = 0, \dots, k-1, \quad (k \geq 3); \quad (25)$$

$$\psi([p^i, p^{i+1}[) = ]0, 1[ \text{ pour tout } i = 1, \dots, k-2. \quad (26)$$

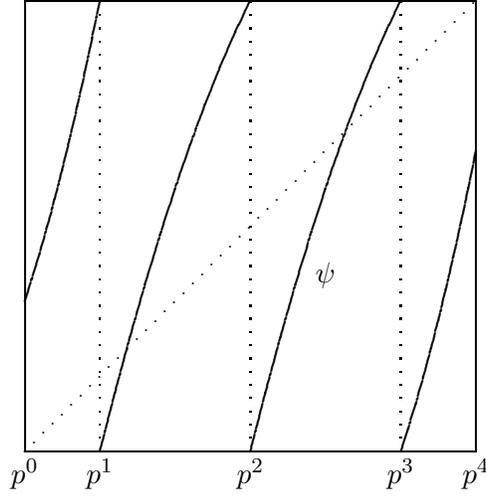


Figure 11

**Lemme 6.10.** *Sous ces hypothèses, pour tout intervalle ouvert  $I \subset [0, 1]$  il existe un entier positif  $n_0 = n_0(I)$  tel que  $\psi^{n_0}(I)$  contient  $]0, 1[$ . En particulier,  $\psi$  est topologiquement mélangeante.*

**Preuve** Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\psi'(x) \geq 2 + \varepsilon$  pour tout  $x \in [p^i, p^{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, k - 1$ . Soit  $n_0$  tel que

$$\left(\frac{2 + \varepsilon}{2}\right)^{n_0} |I| > 1.$$

Nous affirmons qu'il existe  $n < n_0$  tel que  $\psi^n(I)$  contient un intervalle du type  $]p^i, p^{i+1}[$ , avec  $i = 1, \dots, k - 2$ . Supposons le contraire et pour chaque  $n < n_0$  prenons une composante connexe  $I_n$  de  $\psi^n(I)$  de taille maximale. Alors  $I_n$  est contenu dans un intervalle  $]p^i, p^{i+1}[$ , avec  $i = 0, \dots, k - 1$ , ou bien  $I_n$  ne contient qu'un seul point  $p^i$ , avec  $i = 1, \dots, k - 2$ . Dans le premier cas on a  $|\psi(I_n)| \geq (2 + \varepsilon) |I_n|$ . Dans le deuxième cas,  $I_n$  est coupé en deux intervalles par  $p^i$ . L'un de ces intervalles a une taille supérieure ou égale à la moitié de celle de  $I_n$ , et donc son image par  $\psi$  a une taille supérieure ou égale à  $(\frac{2+\varepsilon}{2}) |I_n|$ . Par récurrence on obtient

$$|I_{n_0}| \geq \left(\frac{2 + \varepsilon}{2}\right)^{n_0} |I| > 1,$$

ce qui est absurde.

On a alors démontré qu'il existe  $n < n_0$  tel que  $\psi^n(I)$  contient un intervalle du type  $]p^i, p^{i+1}[$ , avec  $i = 1, \dots, k - 2$ . Donc,  $\psi^{n+1}(I)$  contient  $\psi(]p^i, p^{i+1}[) = ]0, 1[$ , et ceci finit la preuve du lemme.  $\square$

On peut maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de cet appendice. Bien qu'une version plus générale puisse être donnée pour des applications dilatantes par morceaux et topologiquement mélangeantes de l'intervalle à l'aide des résultats de [3], ce n'est que cette version qui a été utilisée à la fin de la preuve du théorème D. L'argument de la preuve ci-dessus est à comparer avec l'un des arguments principaux de [30].

**Théorème 6.11.** *Soient  $\psi_1$  et  $\psi_2$  deux applications dilatantes par morceaux de l'intervalle unité qui satisfont les propriétés (25) et (26). On suppose que  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont de classe  $C^r$ ,  $2 \leq r \leq \omega$ , et qu'elles sont conjuguées par un homéomorphisme direct  $\varphi$  de  $[0, 1]$ . Si  $\varphi$  est absolument continu, alors la restriction de  $\varphi$  à  $]0, 1[$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$ .*

**Preuve** Soient  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  les densités des uniques mesures de probabilité absolument continues invariantes par  $\psi_1$  et  $\psi_2$  respectivement. Puisque  $\varphi$  est absolument continu,  $\varphi$  envoie la mesure  $d\mu_1 = \varrho_1 d(\text{Leb})$  sur la mesure  $d\mu_2 = \varrho_2 d(\text{Leb})$ . Pour  $x \in [0, 1]$  on définit

$$U_i(x) = \mu_i([0, x]) = \int_0^x \varrho_i(s) ds, \quad i = 1, 2.$$

Puisque  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  sont positives, les fonctions  $U_1$  et  $U_2$  sont inversibles, et on a

$$\varphi(x) = U_2^{-1} \circ U_1(x). \quad (27)$$

Les fonctions  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  sont à variation bornée, et donc les limites latérales  $\varrho_i^-(x) = \lim_{y \rightarrow x^-} \varrho_i(y)$  et  $\varrho_i^+(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} \varrho_i(y)$  existent pour  $i = 1, 2$  et tout  $x \in ]0, 1[$ . Puisque  $\varrho_2$  est inférieurement bornée par une constante positive, d'après (27) on voit que  $\varphi$  est différentiable à droite et à gauche en tout point, avec

$$\varphi'_\pm(x) = \frac{(U_1)'_\pm(x)}{(U_2)'_\pm(U_2^{-1} \circ U_1(x))} = \frac{\varrho_1^\pm(x)}{\varrho_2^\pm(\varphi(x))},$$

où  $\varphi'_+$  (resp.  $\varphi'_-$ ) désigne la dérivée à droite (resp. à gauche) de  $\varphi$  (et de manière analogue pour  $U_1$  et  $U_2$ ). Notons maintenant que par hypothèse l'application  $\psi_1$  possède au moins une branche avec un point fixe hyperbolique. La proposition 6.9 implique que  $\varphi$  est un difféomorphisme local de classe  $C^r$  sur un voisinage  $I$  à droite de ce point. Soit  $n_0 = n_0(I)$  l'entier donné par le lemme 6.10. L'égalité  $\varphi \circ \psi_1^{n_0} = \psi_2^{n_0} \circ \varphi$  entraîne que  $\varphi$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$  au voisinage de tout point  $x \in ]0, 1[ - \cup_{n=0}^{n_0-1} \cup_{i=0}^k \psi_1^{-n}(p^i)$ . Pour obtenir que  $\varphi$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$  au voisinage de tout point  $x \in \cup_{n=0}^{n_0-1} \cup_{i=0}^k \psi_1^{-n}(p^i)$ , on raisonne par récurrence en utilisant l'égalité  $\varphi \circ \psi_1^{-1} = \psi_2^{-1} \circ \varphi$ , où  $\psi_1^{-1}$  et  $\psi_2^{-1}$  désignent les inverses des branches conjuguées de  $\psi_1$  et  $\psi_2$  respectivement.

□

## Bibliographie

- [1] V. ARNOLD. Small denominators I. Mapping the circle into itself. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **25** (1961), pp.21-86.
- [2] A. BEARDON. *The geometry of discrete groups*. Springer-Verlag (1983).
- [3] J. BUZZI. Specification on the interval. *Trans. of the AMS* **349** (1997), pp.2737-2754.
- [4] J. CANTWELL & L. CONLON. Endsets of exceptional leaves; a theorem of G. Duminy. In *Foliations: geometry and dynamics*. World Sci. Publishing, River Edge, Warsaw (2000), pp.225-261.
- [5] L. CARLESON & T. GAMELIN. *Complex dynamics*. Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York (1993).
- [6] A. DENJOY. Sur les courbes définies par des équations différentielles à la surface du tore. *J. Math. Pure et Appl.* **11** (1932), pp.333-375.
- [7] P. DIPPOLITO. Codimension one foliations of closed manifolds. *Annals of Math.* **107** (1978), pp.403-453.
- [8] G. DUMINY. Manuscrit non publié, Université de Lille (1977 ?).
- [9] É. GHYS. Classe d'Euler et minimal exceptionnel. *Topology* **26**, no. **1** (1987), pp.93-105.
- [10] É. GHYS. Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité. *Bol. Soc. Brasileira Mat.* **24** (1993), pp.137-178.
- [11] É. GHYS. Groups acting on the circle. *L'Enseignement Mathématique* **47** (2001), pp.329-407.
- [12] É. GHYS & V. SERGIESCU. Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle. *Comment. Math. Helvetici* (1987), pp.185-239.
- [13] É. GHYS & T. TSUBOI. Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1. *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)* **38**, fasc. **1** (1988), pp.215-244.
- [14] P. DE LA HARPE. *Topics in geometric group theory*. Univ. of Chicago Press (2000).
- [15] B. HASSELBLAT & A. KATOK *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge Univ. Press (1995).
- [16] M. HERMAN. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Publ. Math. IHES* **49** (1979), pp.5-234.
- [17] M. HIRSCH. A stable analytic foliation with only exceptional minimal set. *Lecture Notes in Math.* **468** (1965), pp.9-10.
- [18] J. HU & D. SULLIVAN. Topological conjugacy of circle diffeomorphisms. *Ergodic Theory and Dynam. Systems* **17**, no. **1** (1997), pp.173-186.
- [19] A. LASOTA & J. YORKE. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **186** (1973), pp.481-488.

- [20] T. LI & J. YORKE. Ergodic transformations from an interval into itself. *Trans. Amer. Math. Soc.* **235** (1978), pp.183-192.
- [21] G. MARGULIS. Free subgroups of the homeomorphism group of the circle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331**, no. **9** (2000), pp.669-674.
- [22] W. DE MELO & S. VAN STRIEN. *One-dimensional dynamics*. Springer Verlag (1993).
- [23] J. MOSER. On commuting circle mappings and simultaneous diophantine approximations. *Mathematische Zeitschrift* **205**, no. **1** (1990), pp.105-121.
- [24] J. REBELO. Ergodicity and rigidity for certain subgroups of  $\text{Diff}^\omega(S^1)$ . *Ann. Sci. de l'École Normale Sup.* **32**, (1999), pp.433-453.
- [25] J. REBELO. A theorem of measurable rigidity in  $\text{Diff}^\omega(S^1)$ . *Ergodic Theory and Dynam. Systems* **21**, no. **5** (2001), pp.1525-1561.
- [26] J. REBELO. Subgroups of  $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$  acting transitively on unordered 4-uples. Prépublication de SUNY at Stony Brook.
- [27] J. REBELO & R. DA SILVA. The multiple ergodicity of non-discrete subgroups of  $\text{Diff}^w(S^1)$ . À paraître dans *Moscow's Math. Journal*.
- [28] R. SACKSTEDER. On the existence of exceptional leaves of foliations of co-dimension one. *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)* **XIV**, (1964), pp.221-225.
- [29] R. SACKSTEDER. Foliations and pseudogroups. *Amer. Journal of Math.* **87** (1965), pp.79-102.
- [30] M. SHUB & D. SULLIVAN. Expanding endomorphisms of the circle revisited. *Ergodic Theory and Dynam. Systems* **5**, no. **2** (1985), pp.285-289.
- [31] S. STERNBERG. On local  $C^n$  contractions of the real line. *Duke Math. J.* **24** (1957), pp.97-102.
- [32] J. C. YOCCOZ. *Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle*. Thèse d'État, Université Paris Sud, Orsay (1985).