Sur les rapprochements par conjugaison en dimension 1 et classe C^1

Andrés Navas

Toute action d'un groupe dénombrable par homéomorphismes d'une variété unidimensionnelle (séparée) est topologiquement conjuguée à une action par des homéomorphismes bilipschitziens. Ce résultat à l'air innocent a été établi dans [6] via une méthode probabiliste pour des variétés compactes, mais une preuve plus simple et générale a été donnée par B. Deroin dans [5]. Il est important de signaler que ceci est loin d'être valable en dimension supérieure même pour des actions de $\mathbb{Z}$, d'après notamment [13].

Les résultats de cette Note sont inspirés (entre autres) par le fait ci-dessus ainsi que par la question suivante :

– *Sous quelles conditions une action donnée peut-elle être conjuguée en une action dont les générateurs deviennent aussi (Lipschitz ou C^1) proches de translations que l'on veut ? Dans le cas où de telles conjugaisons existent, peut-on les relier par un chemin continu de conjugués ?*

Voici un premier résultat dans le contexte lipschitzien qui nous sert de motivation pour la suite. Pour simplifier, nous désignérons par X soit le cercle soit l'intervalle fermé, et par la suite nous ne considérerons que des homéomorphismes de X qui respectent l'orientation.

Théorème A. Si Γ est un groupe de type fini et à croissance sous-exponentielle d'homéomorphismes de X, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des conjugués topologiques de Γ pour lesquels les générateurs (et leurs inverses) sont des homéomorphismes lipschitziens à des contantes de Lipschitz $\leq e^{\varepsilon}$.

Dans le cadre des difféomorphismes de classe C^1, nous ne savons pas traiter en général les actions de groupes à croissance sous-exponentielle. Cependant, nous pouvons donner une réponse affirmative à nos questions pour les groupes nilpotents. Signalons d'une part que des constructions différentes d'actions de groupes (sans torsion et) nilpotents par difféomorphismes de classe C^1 de l'intervalle (ainsi que des résultats de rigidité en classe $C^{1+\tau}$) sont données dans [4, 9, 16, 17]. D'autre part, un exemple d'un groupe de difféomorphismes à croissance sous-exponentielle et non virtuellement nilpotent est donné dans [19]; pour cet exemple particulier, nos questions y sont déjà répondues par l'affirmatif.

Théorème B. Si Γ est un groupe nilpotent et de type fini de difféomorphismes de classe C^1 de X, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des conjugués topologiques de Γ pour lesquels les générateurs (et leurs inverses) sont encore des difféomorphismes de classe C^1 de X mais à dérivée $\leq e^{\varepsilon}$ partout.

Rappelons que pour une action sur X, l'orbite d'une paire de points $x < y$ est dite *de type ressort* s'il existe des éléments f, g tels que

$$x < f(x) < f(y) < g(x) < g(y) < y. \tag{1}$$

L'existence de telles orbites est une obstruction pour rapprocher (au sens de Lipschitz) des actions par des translations. En effet, les relations (1) sont stables par conjugaison topologique, et elles entraînent évidemment que l'un des éléments doit contracter d'un facteur $< 1/2$ une partie de l'intervalle correspondant. Encore plus, ces orbites donnent lieu à de l'entropie positive pour l'action [11]. D'un coté algébrique, les orbites de type ressort entraînent l'existence de semigroupes libres (par une application directe du lemme du ping-pong de Klein dans sa version positive), donc une croissance exponentielle pour le groupe. Ceci rend naturelle la question suivante :

Question. L'absence d'orbites de type ressort pour une action par difféomorphismes de classe C^1 entraîne-t-elle l'existence de conjugaisons topologiques de telle sorte que les générateurs deviennent aussi Lipschitz (C^1 ?) proches de translations que l'on veut ?

Cette question se pose plus naturellement dans le contexte des pseudo-groupes d'homéomorphismes (donc, pour des feuilletages de codimension 1). Dans ce cadre, une réponse par l'affirmatif donnerait une preuve alternative du résultat de [15] qui établit la nullité de l'entropie géométrique [11] de tout feuilletage de codimension 1, transversalement C^1 et sans feuille ressort. Signalons en passant qu'il existe des actions lipschitziennes à entropie positive et sans orbite ressort [11], mais ces actions ne sont pas C^1 lissables [3].

Pour conclure, nous considérons une version paramétrée du Théorème B. Ceci est étroitement lié à des problèmes de déformation de feuilletages de codimension 1 (voir [8]).[1] Dans cet esprit, dans [7], H. Eynard s'intéresse aux réprésentations de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathrm{Diff}_+([0,1])$ et démontre la C^1-connexité par arcs de l'espace des réprésentations par difféomorphismes de classe C^2 (voir la prépublication récente [1] pour la connexité par arcs en classe C^∞). Le théorème plus bas étend ce résultat en ce qui concerne le groupe qui agit, la régularité des difféomorphismes concernés et la variété unidimensionnelle sous-jacente.

Théorème C. L'espace des actions de tout groupe nilpotent de type fini par difféomorphismes de classe C^1 de l'intervalle fermé est connexe par arcs. Ceci reste valable pour le cas du cercle pour des actions de $\mathbb{Z}^d$; plus généralement, toute action d'un groupe nilpotent de type fini par difféomorphismes de classe C^1 du cercle est dans la composante connexe d'une action qui transite par un morphisme vers un groupe fini de rotations.

Avec un petit effort suplémentaire dans la démonstration, ce théorème (ainsi que le Théorème B) s'étend aux extensions finies de groupes nilpotents. En dehors des groupes libres, nous ne connaissons pas d'autres groupes (agissant fidélement et) pour lesquels il reste encore valable.[2] Notons cependant que dans la preuve du Théorème C, l'arc qui joint deux réprésentations transite par une réprésentation par des translations. Pour joindre une réprésentation donnée à une réprésentation par des translations, nous construisons un chemin explicite formé par des conjugués topologiques de la réprésentation originelle. Néanmoins, ceci est évidemment impossible pour des actions de groupes libres en général (par exemple, une action de type Schottky sur le cercle ne peut jamais rapprocher –même continûment– aucune action par des rotations via des conjugaisons topologiques).

Pour conclure cette Introduction, signalons qu'étant donnée la méthode de démonstration du Théorème C décrite plus haut, nous n'obtenons aucune information de connexité *locale* par arcs pour l'espace de réprésentations. Ce problème reste largement ouvert.

I. Sur les actions de groupes à croissance sous-exponentielle. Pour la preuve du Théorème A, nous suivons la méthode de [5]. Fixons $\lambda := e^{-\varepsilon} < 1$. Puisque Γ a une croissance sous-exponentielle, étant fixé un système fini de générateurs $\mathcal{G}$, il existe $C = C_{\varepsilon,\mathcal{G}}$ tel que le cardinal de la boule $B(n)$ de rayon n correspondante est $\leq C([\lambda+1]/2\lambda)^n$. Considérons la mesure μ sur X

[1] Une autre motivation vient d'une vieille question de H. Rosenberg à propos de l'existence d'actions structurellement stables de $\mathbb{Z}^2$ par difféomorphismes du cercle. À notre connaissance, cette question reste encore ouverte.

[2] Deux exemples intéressants à traiter pour commencer ce sont le groupe de Grigorchuk-Machì [19] et le groupe de Baumslag-Solitar $BS(1,2)$. Pour ce dernier groupe, les résultats de [3, 12, 21] plus la discussion autour des orbites de type ressort plus haut impliquent que l'action triviale ne peut être rapprochée par des conjugués topologiques d'aucune action fidèle par difféomorphismes de classe C^1.

définie par

$$\mu := \sum_{f \in \Gamma} \lambda^{\ell(f)} f_*(Leb),$$

où $\ell(f)$ désigne la longueur de l'élément f par rapport au système de générateurs choisi et Leb désigne la mesure de Lebesgue sur X. Nous affirmons que μ a une masse totale finie. En effet, si l'on désigne par $S(n)$ la sphère de rayon n dans Γ, alors

$$\mu(X) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \big|S(n)\big| \leq \sum_{n \geq 0} \lambda^n \big|B(n)\big| \leq C \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda + 1}{2} \right)^n = \frac{2C}{1 - \lambda} < \infty.$$

De plus, puisque pour tout générateur g et tout $f \in \Gamma$ l'inégalité $\big|\ell(gf) - \ell(f)\big| \leq 1$ a lieu, nous avons

$$g_*(\mu) = \sum_{f \in \Gamma} \lambda^{\ell(f)} (gf)_*(Leb) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{f \in \Gamma} \lambda^{\ell(gf)} (gf)_*(Leb) = \frac{\mu}{\lambda}. \tag{2}$$

La mesure μ est de masse finie, à support totale et sans atôme. Elle est donc équivalente par conjugaison topologique à la mesure de Lebesgue à un facteur près. Après un changement de coordonées envoyant $\frac{\mu}{\mu(X)}$ sur Leb, la relation (2) devient, pour tout intervalle $I \subset X$,

$$|g^{-1}(I)| = g_*(Leb)(I) \leq \frac{Leb(I)}{\lambda} = \frac{|I|}{\lambda}.$$

Ceci entraîne que dans ces nouvelles coordonnées, g^{-1} est lipschitzien de constante $\leq 1/\lambda$.

Remarque. Nous ignorons si dans le cas d'une action par homéomorphismes lipschitziens, le conjugant (*i.e.* le changement de coordonnées) ci-dessus peut toujours être pris lipschitzien (voir [22] pour un résultat qui, d'après le II. plus bas, pointe dans une direction plutôt négative). En ce qui concerne les Théorèmes B et C, la nécessité de considérer des conjugaisons topologiques vient des points fixes hyperboliques, dont on ne peut pas se débarrasser par des conjugaisons lisses.

II. Des rapprochements par des conjugaisons lisses via des équations cohomologiques. Un difféomorphisme f du cercle (resp. de l'intervalle) est C^1-proche de la rotation d'angle $\rho(f)$ (resp. de l'identité) si et seulement si sa dérivée est partout proche de 1. Donc, pour obtenir des rapprochements via des conjugaisons par difféomorphismes soit à une rotation soit à l'identité, nous devons chercher φ de telle sorte que

$$\big|\log(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})'\big| = \big|\log(\varphi') \circ (f \circ \varphi^{-1}) + \log(f') \circ (\varphi^{-1}) - \log(\varphi') \circ (\varphi^{-1})\big|$$

soit partout petit. En d'autres termes, nous cherchons des solutions raprochées $u = \log(\varphi')$ de *l'équation cohomologique*

$$u - u \circ f = \log f'. \tag{3}$$

Il se trouve que d'après [20], ces solutions raprochées existent non seulement pour un difféomorphisme mais aussi pour des groupes nilpotents pourvu que certains exposants de Lyapunov associés soient tous nuls.[3] Dans notre contexte, cela se traduit par le point (ii) du lemme ci-dessous.

Lemme (d'existence de solutions rapprochées). *Soit* Γ *un sous-groupe nilpotent et de type fini de* $\mathrm{Diff}^1_+(X)$ *engendré par une partie finie* $\mathcal{G}$. *Alors :*
(i) *soit* Γ *admet des orbites finies,*

[3]Pour le cas d'une seule application, ceci résulte d'une application directe du théorème de Hahn-Banach lorsque la moyenne de $\log(f')$ est nulle par rapport à toute probabilité invariante.

(ii) *soit* Γ *n'admet pas de telles orbites mais il est topologiquement semi-conjugué à une action par des rotations.*
Dans le deuxième cas, pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe une fonction continue* u *telle que pour tout* $f \in \mathcal{G}$ *l'inégalité* $|u - u \circ f - \log f| \leq \varepsilon$ *est partout satisfaite.*

Preuve. Pour des actions sur l'intervalle, on est bien sûr toujours dans le cas (i). Pour des actions sur le cercle, la dichotomie entre (i) et (ii) s'applique plus généralement aux actions des groupes moyennables : voir [18, Lemma 4.1.2]. Dans le cas (ii), il existe une unique mesure de probabilité sur S^1 qui est supportée sur l'unique ensemble non vide compact invariant et minimal de l'action (cet ensemble K soit il coïncide avec tout le cercle, soit il est homéomorphe à l'ensemble de Cantor). De plus, tout élément ayant des points fixes doit fixer chaque point de K.

D'après [20], pour assurer l'existence de solutions rapprochées à notre équation cohomologique, nous devons montrer que pour toute mesure de probabilité μ invariante pour l'action et tout élément $g \in \Gamma$, nous avons

$$\int_X \log g'(x) d\mu(x) = 0.$$

Or, ceci est toujours valable dans le cas (ii). En effet, si g a un nombre de rotation irrationnel, on sait que la moyenne du logarithme de sa dérivée est nulle par rapport à l'unique mesure de probabilité invariante (voir [14, Proposition I.I, Chapitre VI]). Si le nombre de rotation de g est rationnel, alors pour un certain $N \geq 1$ on a que g^N fixe tous les points de K. En particulier, la dérivée de g^N est égale à 1 partout sur $K = \mathrm{supp}(\mu)$, donc

$$0 = \int_{\mathrm{S}^1} \log (g^N)'(x) d\mu(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\mathrm{S}^1} \log g'(g^i(x)) = N \int_{\mathrm{S}^1} \log g'(x) d\mu(x).$$

Par suite,

$$\int_{\mathrm{S}^1} \log g'(x) d\mu(x) = 0,$$

tel que nous le voulions.

Revenons au problème du rapprochement par conjugaison dans le cas (ii) (l'autre cas sera traité plus tard). Pour chaque $n \geq 1$ et chaque $s \in [0,1]$, posons

$$v_{n+s} := (1-s)u_n + s u_{n+1} + C_{n+s},$$

où u_n est une fonction partout vérifiant

$$\big| u_n - u_n \circ f - \log f' \big| \leq \frac{1}{n}$$

pour tout $f \in \mathcal{G}$ et C_{n+s} est l'unique constante qui satisfait

$$\int_X \exp\big((1-s)u_n + s u_{n+1}\big) = \exp(-C_{n+s}).$$

On vérifie alors que $x \to \int_0^x \exp(v_{n+s})$ définit un difféomorphisme φ_{n+s} de X qui varie continûment par rapport au paramètre. De plus, $\varphi_1 = Id$, et en renversant des calculs précédents, on constante aisément que $\big| \log(\varphi_{n+s} \circ f \circ \varphi_{n+s}^{-1})' \big|$ converge uniformément vers zéro lorsque n tends vers l'infini pour tout $f \in \mathcal{G}$, tel qu'on le souhaitait.

Nous venons donc de montrer que toute action vérifiant la condition (ii) contient une réprésentation (non nécessairement fidèle !) par des rotations dans son adhérence par conjugaisons C^1. De plus, cette réprésentation est aboutie par un chemin continu de conjugués.

Remarquons que les calculs précédents ne peuvent pas être renversés de façon à montrer par exemple que toute action libre par difféomorphismes du cercle est contenue dans l'adhérence par conjugaisons de la réprésentation par des rotations correspondante. En effet, celui-ci est un problème qui ne se modèle pas par des équations cohomologiques. D'ailleurs, nous ignorons si cela est toujours vrai. Signalons cependant que c'est le cas pour des actions de $\mathbb{Z}$, d'après un résultat récent de C. Bonatti et N. Guelman [2]. Pour le cas de l'intervalle, un résultat analogue a été aussi récemment prouvé par É. Farinelli [10].

III. À propos des solutions rapprochées. La preuve précédente est un peu obscure car elle fait appel à [20]. Pour la commodité du lecteur, nous esquisons l'argument pour $\Gamma \sim \mathbb{Z}^d$, ce qui nous permettra de mieux expliquer notre méthode dans le cas des orbites finies.

Pour chaque $n \geq 1$, on considère la boule positive $B_+(n)$ de rayon n dans $\mathbb{Z}^d$ par rapport au système canonique des générateurs $\mathcal{G} := \{f_1, \ldots, f_d\}$, c'est-à-dire l'ensemble $B_+(n) := \{f_1^{k_1} \cdots f_d^{k_d} : 0 \leq k_i < n,\ 1 \leq i \leq d\}$. On pose

$$u_n(x) := \frac{1}{|B_+(n)|} \sum_{f \in B_+(n)} \log f'(x). \tag{4}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} u_n(f_i(x)) &= \frac{1}{|B_+(n)|} \sum_{f \in B_+(n)} \log f'(f_i(x)) \\ &= \frac{1}{|B_+(n)|} \sum_{f \in B_+(n)} \big[\log(f \circ f_i)'(x) - \log f_i'(x)\big] \\ &= -\log f_i'(x) + \frac{1}{|B_+(n)|} \sum_{f \in B_+(n) f_i} \log f'(x), \end{aligned}$$

où $B_+(n) f_i := \{g f_i : g \in B_+(n)\}$. Donc, la valeur de l'expression

$$\big| u_n(x) - u_n(f_i(x)) - \log f_i'(x) \big| \tag{5}$$

est inférieure ou égale à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^d} \left| \sum_{f \in B_+(n)} \log f'(x) - \sum_{f \in B_+(n) f_i} \log f'(x) \right| \\ &\qquad = \frac{1}{n^d} \left| \sum_{0 \leq m_j < n, j \neq i} \big[\log(f_1^{m_1} \cdots f_i^0 \cdots f_d^{m_d})'(x) - \log(f_1^{m_1} \cdots f_i^n \cdots f_d^{m_d})'(x)\big] \right| \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{n^d} \left| \sum_{0 \leq m_j < n, j \neq i} -\log(f_i^n)'(f_1^{m_1} \cdots f_{i-1}^{m_{i-1}} f_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots f_d^{m_d}(x)) \right| \\ &\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{n^d} \left| \sum_{0 \leq m_j < n} -\log f_i'(f_1^{m_1} \cdots f_i^{m_i} \cdots f_d^{m_d}(x)) \right| \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = \left| \int_X \log f_i' \; d\mu_{n,x} \right|, \end{aligned}$$

où $\mu_{n,x}$ désigne la mesure de probabilité

$$\frac{1}{|B_+(n)|} \sum_{f \in B_+(n)} \delta_{f(x)}.$$

Notons que la commutativité (en non la simple moyennabilité) a été utilisée pour obtenir les deuxième et troisième égalités plus haut. Or, si μ est un point d'accumulation d'une suite de mesures μ_{n,x_n}, alors μ est invariante par l'action de Γ, et l'intégrale en considération pour $x_n := x$ converge vers $\int_X \log f_i' \, d\mu$.

Le procédé de moyenisation précédent est stable par extension centrale, et il s'applique donc aux groupes nilpotents.[4] L'argument montre alors qu'une condition suffisante (at d'ailleurs nécessaire) pour l'existence de solutions rapprochées pour notre équation cohomologique est la nullité de l'intégrale de chaque fonction $\log f_i'$ par rapport à toute mesure de probabilité invariante. Cependant, ce calcul montre aussi que si cette condition n'est pas satisfaite mais ces intégrales sont petites en valeur absolue, alors on peut trouver des solutions à des erreurs petits. Nous énonçons ceci comme un lemme, la preuve étant une adaptation facile des arguments de [20] que nous laisons au soin du lecteur.

Lemme (d'existence de solutions érronées mais avec une erreur controlée). *Soit Γ un groupe nilpotent engendré par une partie finie $\mathcal{G}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ qui satisfait la propriété suivante : si $\Phi : \Gamma \to \mathrm{Diff}^1_+(X)$ est une réprésentation telle que la valeur absolue de la moyenne de $\log \Phi(f)'$ par rapport à toute mesure de probabilité invariante par Γ est inférieure ou égale à δ pour tout $f \in \mathcal{G}$, alors il existe une fonction continue u partout satisfaisant l'inégalité $|u - u \circ \Phi(f) - \log \Phi(f)'| \leq \varepsilon$ pour tout générateur $f \in \mathcal{G}$.*

D'après ce qui précède, pour conclure la preuve du Théorème B dans le cas (i), nous devons identifier les probabilités invariantes de l'action et montrer que par conjugaison topologique on peut obtenir des conjugués C^1 dont les moyennes du logarithme de la dérivée sont petites en valeur absolue. Bien sûr, il suffit de considérer les mesures invariantes *ergodiques*, c'est-à-dire celles qui ne peuvent pas être exprimées comme combinaison convexe non triviale de probabilités invariantes. Or, l'ensemble $\hat{\Gamma}$ formé par les éléments de Γ avec des points fixes est un sous-groupe distingué (c'est le noyau de la fonction nombre de rotation, qui est dans ce cas un homomorphisme [18, Proposition 2.2.11]). Toute probabilité invariante doit être supportée sur des points fixés par $\hat{\Gamma}$, car le complémentaire est formé par des points qui sont errants pour certains éléments de $\hat{\Gamma}$. En particulier, puisqu'il y a des orbites finies, toute probabilité invariante par Γ et ergodique est la moyenne sur une telle orbite. L'intégrale de $\log f'$ par rapport à une telle mesure n'est autre que la somme des logarithmes des multiplicateurs le long des orbites périodiques de f contenues dans son support. Nous avons ainsi réduit le problème à trouver des conjugués de telle sorte que ces multiplicateurs deviennent des nombres compris entre $e^{-\delta}$ et e^{δ} pour un $\delta > 0$ donné, et ceci pour tout générateur f de Γ.

IV. Applatissement des points hyperboliques. Il existe des techniques bien connues pour rendre presque paraboliques des points périodiques hyperboliques dont nous pouvons nous en servir. Soit $\delta > 0$ donné, et soit $\{x_1, \ldots, x_k\} = \mathrm{supp}(\mu)$ notre orbite finie. Fixons $\alpha > 0$, et prenons $\psi_\alpha \in \mathrm{Homéo}_+(\mathrm{S}^1)$ de telle sorte qu'il soit un difféomorphisme en dehors de $\{x_1, \ldots, x_k\}$ et près de

[4] D'une manière surprenante, ce procédé n'est pas toujours stable par extension finie [20]. Cependant, à l'aide de [20, Théorème 2] et (d'une extension facile) de la proposition du V., on peut montrer que nos Théorèmes B et C restent valables pour les extensions finies de groupes nilpotents. Nous ignorons si ceci est encore vrai pour des groupes virtuellement nilpotents en général.

chaque x_j il coïncide avec
$$x \mapsto x_j + (x - x_j)^{\frac{1}{\alpha}}.$$
Nous affirmons alors que chaque $f_\alpha := \psi_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^1 ; de plus, si α est suffisamment grand, alors pour tout indice j et tout $f \in \mathcal{G}$,
$$\big| \log(\psi_\alpha \circ f^N \circ \psi_\alpha^{-1})'(x_j) \big| \leq \delta,$$
où $N \geq 1$ est la période des points périodiques de f. En effet, on constate d'abord que pour x proche de x_j,
$$\psi_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}(x) = \big[f\big(x_j + (x - x_j)^\alpha\big) - f(x_j) \big]^{1/\alpha} + f(x_j).$$
Donc,
$$\begin{aligned}
(\psi_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1})'(x) &= \alpha (x - x_j)^{\alpha - 1} f'\big(x_j + (x - x_j)^\alpha\big) \frac{1}{\alpha} \big[f(x_j + (x - x_j)^\alpha) - f(x_j) \big]^{\frac{1}{\alpha} - 1} \\
&= (x - x_j)^{\alpha - 1} f'\big(x_j + (x - x_j)^\alpha\big) \bigg[\frac{f(x_j + (x - x_j)^\alpha) - f(x_j)}{(x - x_j)^\alpha} \bigg]^{\frac{1}{\alpha} - 1} \big[(x - x_j)^\alpha \big]^{\frac{1}{\alpha} - 1} \\
&= f'\big(x_j + (x - x_j)^\alpha\big) \left[\frac{f(x_j + (x - x_j)^\alpha) - f(x_j)}{(x - x_j)^\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha} - 1}.
\end{aligned}$$
Lorsque x tend vers x_j, cette expression converge vers
$$f'(x_j) \big[f'(x_j) \big]^{\frac{1}{\alpha} - 1} = \big[f'(x_j) \big]^{\frac{1}{\alpha}},$$
ce qui démontre de manière simultanée les deux propriétés annoncées.

Nous pouvons répéter cet argument avec chaque orbite finie contenant une orbite périodique d'un générateur de Γ dont le multiplicateur soit $\leq e^{-\delta}$ ou $\geq e^{\delta}$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de telles orbites, ceci permet enfin de conclure la preuve du Théorème B.

Remarque. Ci-dessus, on aurait pu conjuguer directement par un homéomorphisme qui est un difféomorphisme loin des points de l'orbite concernée et dont le germe autour de ces points coïncide avec celui de $x \to \exp(-1/x)$ à l'origine. En effet, ceci rend tangent à l'identité tout difféomorphisme de classe C^1 qui préserve l'orbite.

V. Sur la connexité par arcs. Dans la preuve du Théorème B, l'action par des translations est aboutie par un chemin continu de réprésentations lorsqu'il n'y a pas d'orbite finie. Ceci est toujours valable lorsqu'il y a des orbites finies mais les points périodiques des éléments appartenant au support d'une probabilité invariante pour l'action sont tous paraboliques. En effet, la preuve du lemme du II. s'applique encore dans ce contexte. Même si elle ne sera pas fondamentale dans la suite, la proposition suivante (et son corollaire) aide à mieux comprendre ce cas.[5]

Proposition (à propos des points périodiques hyperboliques). *Si Γ est un groupe nilpotent de type fini de difféomorphismes de classe C^1 de X, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
– les points périodiques des éléments de Γ sont tous paraboliques,
– les points périodiques des éléments de Γ appartenant au support d'une mesure de probabilité invariante par Γ sont tous paraboliques.

[5] On peut donner une preuve purement combinatoire de cette proposition, mais nous préférons de faire appel à [20] afin d'illustrer le type d'information contenue dans le résultat cohomologique là-dedans.

Preuve. Si la deuxième condition est valable, nous sommes encore dans le cas où il existe des solutions rapprochées à notre équation cohomologique. Or, l'existence de telles solutions entraîne que les points périodiques des éléments sont tous paraboliques. En effet, une inégalité (partout) du type

$$\big|u - u \circ f - \log f'\big| < \varepsilon$$

entraîne

$$\big|u - u \circ f^N - \log(f^N)'\big| < N\varepsilon.$$

En particulier, si $f^N(x_0) = x_0$, alors

$$\big|\log(f^N)'(x_0)\big| < N\varepsilon.$$

Donc, si de telles fonctions u existent pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons nécessairement $(f^N)'(x_0) = 1$.

Corollaire. *Soit Γ un groupe nilpotent de type fini de difféomorphismes de classe C^1 de X. Si $f \in \Gamma$ admet un point périodique hyperbolique x_0, alors l'orbite de x_0 par Γ est finie.*

Preuve. D'après le lemme du I. et sa démonstration, Γ admet des orbites finies; de plus, le sous-ensemble $\hat{\Gamma}$ des éléments de Γ ayant des points fixes est un sous-groupe distingué et d'indice fini. Si N est la période de x_0 pour f, alors f^N appartient à $\hat{\Gamma}$. Supposons que x_0 ne soit pas fixé par $\hat{\Gamma}$, et soient a, b les points fixes de $\hat{\Gamma}$ à gauche et à droite de x_0. Alors la proposition précédente donne une contradiction lorsqu'on l'applique à l'action de $\hat{\Gamma}$ sur $[a, b]$ après conjugaison par un homéomorphisme qui applatit complétement les dérivées aux extrémités (voir la remarque du IV.). Par suite, $\hat{\Gamma}$ fixe x_0, et puisque $\Gamma/\hat{\Gamma}$ est fini cyclique, l'orbite de x_0 par Γ doit être finie.

Dans le cas où on voit apparaître des orbites périodiques hyperboliques, nous voudrions encore aboutir à une réprésentation par des tranlations par un chemin formé par des conjugués topologiques de l'action originelle. Pour ce faire, on aimerait appliquer une méthode semblable à celle du IV. en prenant une famille de difféomorphimes ψ_α qui varie continûment pour la topologie C^1 par rapport à α en dehors de telles orbites (ou du moins, en dehors des orbites avec un multiplicateur trop grand). En effet, les calculs précédents montrent alors que pour tout $f \in \Gamma$, l'application $\alpha \to f_\alpha$ est continue pour la topologie C^1. Cependant, ce procédé pourrait *à priori* faire exploser les dérivées. Nous devrons donc être un peu plus soigneux, et pour cela il nous sera plus confortable de raisoner au niveau des équations cohomologiques tout en cherchant des solutions rapprochées non nécessairement bornées au vosinage des extrémités.

Soit Γ un groupe nilpotent engendré par une partie finie $\mathcal{G}$. Étant donné $\varepsilon > 0$, fixons le $\delta > 0$ donné par le lemme du III. D'après le corollaire précédent, la réunion des orbites des points périodiques hyperboliques des générateurs à multiplicateur soit $\leq e^{-\delta}$ soit $\geq e^{\delta}$ est un ensemble fini, disons $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Soit ψ un homéomorphisme de X qui est un difféomorphisme C^1 restreint à $X \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ et fixe chaque point x_i de telle sorte que son germe autour d'un tel point coïncide avec celui de $x \to x^\alpha$ à l'origine. Pour $\alpha > 0$ assez large, les multiplicateurs sur ces points des conjugués par ψ des générateurs sont tous compris entre $e^{-\delta}$ et e^{δ}. Fixons un tel α et notons $v := \log(\psi')$. Puisque l'action conjuguée par ψ est une action par difféomorphismes de classe C^1 qui satisfait les hypothèses du lemme du III., il existe une solution ε-rapprochée continue w de l'équation cohomologique associée à cette action, que l'on peut prendre comme étant le logarithme de la dérivée d'un difféomorphisme φ de classe C^1 de X. La fonction $u := w \circ \psi + v$ est alors une solution ε-raprochée de l'équation cohomologique associée à l'action originelle. Même si elle n'est pas continue (elle est non bornée au voisinage des points x_i), elle coïncide sur $X \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ avec le logarithme de la dérivée de $\phi := \varphi \circ \psi$, qui est homéomorphisme de X qui transforme par conjugaison l'action originelle en une autre action par difféomorphismes de classe C^1 de X.

Pour chaque $\varepsilon := 1/n$ prenons la fonction $u := u_n$ induite comme ci-dessus. Ces fonctions sont reliées par des chemins affines $t \to (1-t)u_n + tu_{n+1} =: \hat{u}_{n+t}$. Nous affirmons que quitte à rajouter une constante C_{n+t}, on peut supposer que $u_{n+t} := \hat{u}_{n+t} + C_{n+t}$ est le logarithme de la dérivée d'un homéomorphisme ϕ_{n+t} de X. En effet, l'intégrale totale de la fonction $\exp(\hat{u}_{n+t})$ est finie : ceci découle directement de la convexité de la fonction exponentielle en tenant compte que $\exp(u_n)$ et $\exp(u_{n+1})$ sont toutes les deux d'intégrale totale finie (égale à 1). On prend alors C_{n+t} comme étant l'exponentielle de l'inverse de cette intégrale, on fixe $x_0 \in X$ et on définit

$$\phi_{n+t}(x) := \int_{x_0}^{x} \exp u_{n+t}.$$

Le logarithme de la dérivée du conjugué par ϕ_{n+t} de $f \in \Gamma$ au point $\phi^{-1}(x)$ est égal à

$$\log f'(x) + u_{n+t} \circ f(x) - u_{n+t}(x) = (1-t)\big[\log f'(x) + u_n \circ f(x) - u_n(x)\big] + t\big[\log f'(x) + u_{n+1} \circ f(x) - u_{n+1}(x)\big].$$

Il s'agit donc une fonction continue, ce qui montre que l'action originelle conjuguée par ϕ_{n+t} est une action par difféomorphismes de classe C^1. De plus, cette action varie continûment par rapport au paramètre t. Finalement, l'égalité ci-dessus montre que pour tout $f \in \mathcal{G}$ le logarithme de la dérivée de $\phi_{n+t} \circ f \circ \phi_{n+t}^{-1}$ est inférieur ou égal à $1/n$ partout. Il s'en suit que le chemin d'actions conjuguées par ϕ_{n+t} est continu pour la topologie C^1 et aboutit à l'infini en une réprésentation par des translations, tel qu'on le désirait.

Fin de la preuve du Théorème C. Nous venons de montrer que toute réprésentation soit dans $\mathrm{Diff}_+^1([0,1])$ soit dans $\mathrm{Diff}_+^1(\mathrm{S}^1)$ est dans la même composante connexe par arcs d'une réprésentation par des translations. Ceci montre la connexité par arcs pour le cas des actions sur l'intervalle. Pour le cas du cercle, il nous reste à joindre deux réprésentations par des rotations quelconques. Or, pour le cas des actions de $\mathbb{Z}^d$, cela se fait tout simplément en faisant bouger les angles associés aux générateurs. Pour le cas d'un groupe nilpotent quelconque, les angles irrationnels (donc associés à des générateurs d'ordre infini) peuvent encore être raménés à zéro de manière continue, ce qui montre que la représentation est dans la composante connexe d'une action qui transite par un morphisme ver un groupe fini de rotations.

Remerciements. Je remercie S. Crovisier, É. Ghys, E. Giroux et A. Kocsard, qui ont été les premiers à me signaler la question de la connexité des réprésentations de $\mathbb{Z}^d$ par difféomorphismes en dimension 1. Je remercie aussi C. Bonatti, H. Eynard, N. Guelman et É. Farinelli, dont les résultats gentiment communiqués ont été une source importante d'inspiration, ainsi que Y. Matsuda, qui m'a signalé une erreur dans l'énoncé du Théorème C de la première version de ce travail. Cette Note a été écrite lors de séjours à l'Institut des Mathématiques Pures de Téhéran et à l'Institut Mittag Leffler. Je remercie M. Nassiri et A. Karlsson pour leurs invitations respectives.

Ce travail a été financé par le projet ACT 1103 DySyRF (Centro de Sistemas Dinámicos y Temas Relacionados) ainsi que par le projet FONDECYT 1120131.

References

[1] C. Bonatti & H. Eynard. Connectedness of the space of smooth actions of $\mathbb{Z}^n$ on the interval. Prépublication (2012).

[2] C. Bonatti & N. Guelman. Smooth conjugacy classes of circle diffeomorphisms with irrational rotation number. Prépublication (2012).

[3] J. Cantwell & L. Conlon. An interesting class of C^1 foliations. *Topology Appl.* **126** (2002), no. **1-2**, 281-297.

[4] G. Castro, E. Jorquera & A. Navas. Sharp regularity for certain nilpotent group actions on the interval. Prépublication (2011), arXiv:1108.5223.

[5] B. Deroin. The group of almost-periodic homeomorphisms of the real line. À paraître dans *L'Enseign. Mathématique.*

[6] B. Deroin, V. Kleptsyn & A. Navas. Sur la dynamique unidimensionnelle en régularité intermédiaire. *Acta Math.* **199** (2007), no. **2**, 199-262.

[7] H. Eynard. A connectedness result for commuting diffeomorphisms of the interval. *Ergodic Theory and Dynam. Systems* **31** (2011), no. **4**, 1183-1191.

[8] H. Eynard. *Sur deux questions connexes de connexité concernant les feuilletages et leurs holonomies.* Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Lyon (2009). Disponible sur http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00436304/fr/.

[9] B. Farb & J. Franks. Groups of homeomorphisms of one-manifolds. III. Nilpotent subgroups. *Ergodic Theory and Dynam. Systems* **23** (2003), no. **5**, 1467-1484.

[10] É. Farinelli. Classes de conjugaison des difféomorphismes de l'intervalle en régularité C^1. Prépublication (2012).

[11] É. Ghys, R. Langevin & P. Walczak. Entropie géométrique des feuilletages. *Acta Math.* **160** (1988), no. **1-2**, 105-142.

[12] N. Guelman & I. Liousse. C^1-actions of Baumslag-Solitar groups on S^1. *Algebr. Geom. Topol.* **11** (2011), no. **3**, 1701-1707.

[13] J. Harrison. Unsmoothable diffeomorphisms. *Ann. of Math.* **102** (1975), no. **1**, 85-94.

[14] M. Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Publ. Math. de l'IHÉS* **49** (1979), 5-233.

[15] S. Hurder. Entropy and dynamics of C^1 foliations. Prépublication (2000).

[16] E. Jorquera. A universal nilpotent group of C^1-diffeomorphisms of the interval. *Topology and its Applications* **159**, no. **8** (2012), 2115-2126.

[17] A. Navas. On centralizers of interval diffeomorphisms in critical (intermediate) regularity. À paraître dans *Journal d'Analyse Mathématique.*

[18] A. Navas. *Groups of Circle Diffeomorphisms.* Chicago Lect. in Mathematics, Univ. of Chicago Press (2011).

[19] A. Navas. Growth of groups and diffeomorphisms of the interval. *Geom. Funct. Anal.* **18** (2008), no. **3**, 988-1028.

[20] J.M. Ollagnier & D. Pinchon. Systèmes dynamiques topologiques I. Étude des limites de cobords. *Bull. de la S.F.M.* **105** (1977), 405-414.

[21] C. Rivas. On spaces of Conradian group orderings. *Journal of Group Theory* **13** (2010), no. **3**, 337-353.

[22] D. Volný & B. Weiss. Coboundaries in L_0^∞. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **40** (2004), no. **6**, 771-778.

Andrés Navas
Dpto. de Matemática y C.C., Univ. de Santiago de Chile (USACH)
Alameda 3363, Estación Central, Santiago, Chile
Email: andres.navas@usach.cl