Guias de Algebra III

Cristobal Rivas

0.1 Guia 1

1. Sean U y V espacios vectoriales sobre el cuerpo K de escalares. Pruebe con detalle que $\mathcal{L}(U,V) := \{T : U \to V \mid T \text{ es lineal}\}$, es un espacio vectorial (esto quedo como ejercicio en clase).

2. Termine la prueba del corolario enunciado en clase: Si $T : u \to V$ es una transformacionl ineal y B_U, B_V son bases respectivas, pruebe

   (a) T es invertible si y solo si $M_{B_V B_U}(T)$ es invertible (una implicacion se hizo en clase)

   (b) Si T es invertible, pruebe que $M_{B_V B_U}(T)^{-1} = M_{B_U B_V}(T^{-1})$

3. Sean $M_{22}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices dos por dos con coeficientes reales y $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y de grado dos o menos. Sea $T : M_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por

$$T : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a+d) + (b+c)x + (a+b+2c+d)x^2.$$

   Demuestre que

   (a) T es una transformacion lineal.

   (b) Si las bases de $M_{22}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_2[x]$ son

$$B_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_P = \{1, x, x^2\}$$

   respectivamente, encuentre la matriz representante, $M_{B_P B_M}(T)$, de T en dichas bases.

   (c) Calcule la matriz representante de T en las bases B_M y $B'_P = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$.

   (d) Calcule la dimension del Nucleo y de la imagen de T.

4. Sea X un conjunto finito, y V el espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) $\{f : X \to \mathbb{R}\}$. Para $x_0 \in X$, sea $Ev_{x_0} : V \to \mathbb{R}$ la funcion evaluacion en x_0, es decir, $Ev_{x_0}(f) = f(x_0)$. Pruebe que

   (a) Ev_{x_0} es un elemento del espacio dual de V (en clase anotamos V^* para dicho espacio).

   (b) Pruebe que $\{Ev_x \in V^* \mid x \in X\}$ es un conjunto linealmente independiente.

0.2 Guia 2

1. Sea $T : V \to V$ una aplicacion lineal de espacios de dimension finita. Demuestre que $V = Ker(T) \oplus Im(T)$ si y solo si $Ker(T^2) = Ker(T)$. Vale esto en dimension infinita?

2. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de polinomios de grado 2 o menos, $B = \{1, x, x^2\}$, y sea

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Encuentre bases B' y B'' de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $Q = M_{BB'}(Id)$, y $Q = M_{B''B}(Id)$, donde Id es la transformacion identidad de $\mathbb{R}_2[x]$.

3. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de polinomios de grado 2 o menos, $B = \{1, x, x^2\}$, y sea

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Encuentre bases B' y B'' de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $Q = M_{BB'}(D)$, y $Q = M_{B''B}(D)$, donde D es la transformacion dada por la derivacion (a lo calculo 1) de $\mathbb{R}_2[x]$.

4. (Fin del ejercicio hecho parcialmente en clase) Encuentre P y P^{-1}, matrices 2x2, tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P.$$

5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformacion dada por $x \mapsto Ax$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Encuentre una base de $\mathbb{R}^2$ buena para T, es decir una base B tal que $M_{BB}(T)$ sea diagonal.

Guia 3

En esta guía, T es un operador lineal de V en V, donde V es un espacio vectorial con escalares K. Recuerde que un subespacio $W \subseteq V$ es T-*invariante* si $T(W) \subseteq W$.

Para un polinomio $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in K[x]$, denotamos por $f(T)$ la aplicación

$$a_0 I + a_1 T + \ldots + a_n T^n : V \to V,$$

donde I es la la identidad $I(v) = v$.

1. Para $f(x)$ un polinomio cualquiera, demuestre que $f(T)$ es una aplicación lineal de V en V.

2. Suponga que la colección $\{W_i\}_i$ son subespacies T-invariantes de $T : V \to V$. Demuestre que $\cap W_i$ también es T-invariante.

3. Para $f(x) \in K[x]$, demuestre que $Ker(f(T))$ es un espacio T-invariante.

4. Suponga que V se descompone en suma directa $V = V_1 \oplus V_2$, donde V_1 y V_2 son T-invariantes.

   (a) Demuestre que la restricción de T a V_1 es una aplicación lineal de V_1 en V_1.

   (b) Demuestre que existe una base B de V tal que

   $$M_{BB}(T) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

   donde 0 es una matriz con todas sus entradas 0 y A y B son matrices. Cuáles son?

   (c) Demuestre que $p_T(x) = p_{T_1}(x)p_{T_2}(x)$, donde $p_T(x)$ es el polinomio minimal de T, y $p_{T_i}(x)$ es el polinomio caracteriztico de la restriccion de T a V_i.

5. Demuestre que para $\lambda \in K \setminus \{0\}$,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Guia 4: preparacion para la prueba

1. Encuentre todas las matrices reales 2x2 que lleven la linea $x = y$ en la linea $y = 3x$.

2. Sean A y B en $M_{2,2}(\mathbb{R})$, matrices reales 2x2. Se $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ la transofmacion $X \mapsto AXB$.

   (a) Pruebe que T es una transformacion lineal.

   (b) Encuentre condiciones en A y B para que T sea un isomorfismo.

   (c) Encuentre $M_{BB}(T)$, la matriz de la transformacion T, para B su base favorita (por ejemplo la base 'canonica').

3. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicacion $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 + x_n, x_2 + x_{n-1}, \ldots, x_n + x_1)$. Determine la dimension de la imagen y el kernel de T.

4. Sea $T : V \to V$, con $dim(V) = 2$. Suponga que T no es la multiplicacion por un escalar. Pruebe que existe $v \in V$ tal que $(v, T(v))$ es una base de V. Encuentre la matriz de T expresada en dicha base.

5. Para $T : V \to V$ y un escalar λ, sea V_λ es conjunto de todos los vectores propios de V con valor propio λ union el 0. Pruebe que V_λ es un subespacio de V que es T-invariante. Encuentre y pruebe el resultado analogo para vectores propios generalizados.

6. Sean $T : V \to V$ y W_1, W_2 dos subespacios de V T-invariantes. Pruebe que $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$ tambien son T-invariantes.

7. Sea $\mathbb{R}_n[x]$ el espacio de polinomios de grado a lo mas n. Sea $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ la derivacion. Pruebe que D es un operador nilpotente. Pruebe que $\{0\} = Spec(D)$. Encuentre una base de Jordan para D. Determine todos los espacios D-invariantes de $\mathbb{R}_n[x]$.

8. Sea $T : V \to V$ tal que todo $v \in V$ es un vector propio. Pruebe que existe λ tal que T es la multiplicacion por dicho λ.

9. Suponga que A es una matriz con polinomio caracteriztico $p_A(t) = t^3 - 4t - 1$. Suponga que
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & * & * \end{pmatrix}.$$
Determine las entradas faltantes.

10. Suponga que T es un operador tal que $T^2 - 5T + 6I = 0$ (donde I es el operador identidad y 0 el operador mandar todo a 0). Determine que numeros complejos pueden ser valores propios de T.

11. Sea A una matriz cuyo polinomio caracteriztico $p_A(t)$ se factoriza en factores lineales $(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$. Pruebe que la traza de $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ y $det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$.

12. Calcule A^{300} donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

13. Pruebe que un operador T es nilpotente si y solo si existe una base B tal que $M_{BB}(T)$ es una matriz triangular superior con 0's en la diagonal.

14. Determine la forma de Jordan de
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Pruebe que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $A^2 = A$. Determine su forma de Jordan.

16. Sea V un espacio vectorial sobre los complejos de dimension 5. Suponga que $T : V \to V$ tiene polinomio caracteriztico $P_T(t) = (t - \lambda)^5$. Suponga ademas que el rango (i.e. dimension de la imagen) de $T - \lambda I$ es 2. Determine todas las posibles formas de Jordan de T (empiece por observar que no todas las formas de Jordan son posibles).

17. Sea $T : V \to V$ operador lineal. Sea K^r y W^r el kernel e imagen de T^r.

(a) Pruebe que $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ y que $W_1 \supseteq W_2 \supseteq \ldots$

(b) Pruebe que si $dim(V) < \infty$ entonces existe m tal que $K_m = K_{m+j}$ y $W_m = W_{m+j}$. Encuentre un ejemplo en dimension infinita donde esto no se cumpla.

Guia 5

En esta guia $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota el producto punto (o interno) usual.

1. Suponga que $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$ es un conjunto ortogonal (i.e. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$). Pruebe que X es linealmente independiente.

2. Una matriz A se dice ortogonal si $A^t A = Id$, donde A^t es la matriz traspuesta de A. Pruebe que el producto de matrices ortogonales es ortogonal y la inversa de una matriz ortogonal es ortogonal.

3. Determine la matriz 3x3 que representa (en base canonica) la rotacion de $\mathbb{R}^3$ que

   (a) fija $e_2 = (0, 1, 0)$ y rota θ en el plano perpendicular (i.e. el plano generado por e_1 y e_3).

   (b) fija $(1, 1, 1)$ y rota $2\pi/3$ en su plano perpendicular.

   (c) fija $(1, 1, 0)$ y rota $\pi/2$ en su plano perpendicular.

4. Sea A una matriz ortogonal 3x3 cuyo ángulo de rotación (en el plano donde rota) es distinto de 0 y de π. Sea $M = A - A^t$.

   (a) Pruebe que M tiene rango 2 (i.e. la dimension de su imagen es 2).

   (b) Pruebe que si $x \in Ker(M)$ si y solo si x es un vector propio de A con valor propio 1 (es decir x es un polo o eje de la rotacion A).

Guia 6

En esta guia, salvo dicho lo contrario, V es un espacio vectorial complejo, y $b : V \times V \to \mathbb{C}$ una forma Hermitiana definida positiva. Ademas B es una base ortonormal de V.

Dado $A \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$, anotamos por A^* su traspuesta conjugada. Decimos que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es: Hermitiana si $A^* = A$, Unitaria si $A^* = A^{-1}$, Normal si $A^*A = AA^*$.

1. Sean B'' y B' dos bases ortonormales de V, y sea $P = M_{B''B'}(Id)$ la matriz de cambio de base. Pruebe que P es unitaria (ayuda: comience haciendo el caso $V = \mathbb{C}^n$ y $B' = B_e$ la base canonica).

2. Decimos que un operador $T : V \to V$, es Hermitiano, Unitario o Normal, si la matriz $M_{BB}(T)$ es Hermitiana, unitaria o normal respectivamente. Pruebe que esta definicion no depende de la base ortonormal escogida. (ayuda: use el ejercicio anterior).

3. Dado $T : V \to V$ definimos en clase el operador $T^* : V \to V$ como el unico operador que cumple $M_{BB}(T^*) = M_{BB}(T)^*$. Pruebe que esta definicion no depende de la base ortonormal B escogida.

4. En clase vimos que $b(Tv, w) = b(v, T^*w)$ y $b(v, Tw) = b(T^*v, w)$ para todo $v, w \in V$. Use esto para probar que:

   (a) T es es Hermitiana si y solo si $b(Tv, w) = b(v, Tw)$ para todo $v, w \in V$.

   (b) T es unitaria si y solo si $b(Tv, Tw) = b(v, w)$ para todo $v, w \in V$.

5. Pruebe que si A es invertible, entonces A^*A es Hermitiana y definida positiva (esto ultimo quiere decir que su forma asociada b_A es definida positiva).

6. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ los polinomios de grado 2 o menos. Para $f, g \in V$ defina

$$b(f, g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

   Pruebe que b es una forma simetrica definida positiva y encuentre una base ortonormal de V para dicha forma.

7. Sea $V = M_{22}(\mathbb{R})$ las matrices 2x2 con coeficientes reales. Para $A, B \in V$ defina $b(A, B) = Trasa(AB)$.

   (a) Determine la matriz asociada a b respecto a la base estandar e_{ij} de V.

   (b) Encuentre una base ortogonal respecto a b.

   (c) Determine la signatura de b.

   (d) Ahora, encuentre la signatura de $b : (A; B) \mapsto Trasa(AB)$ donde A, B son matrices nxn.

Guia 7: preparación para la prueba

1. Sea $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$. Aplique el proceso de Gram-Schmidt a esta base para obtener una base ortonormal.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentre una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ respecto al producto $(x,y) \mapsto x^t Ay$.

3. Decimos que una matriz A es *semi-definida positiva* si $x^t Ax \geq 0$ para todo x. Pruebe que para toda matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se tiene que $A^t A$ es semi-definida positiva.

4. Pruebe que la única matriz real que es simétrica, ortogonal y definida positiva es la identidad.

5. Sea (V, b) un espacio vectorial con una forma bilineal simétrica, y sean W_1, W_2 subespecies de V. Pruebe que

   (a) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$. $W_1 \subset (W_1^\perp)^\perp$ y $W_1 \subset W_2$ implica $W_2^\perp \subset W_1^\perp$.

   (b) $V = W_1 \oplus W_1^\perp$ cuando b es no degenerada en W_1.

6. Sea V el espacio de matrices reales 2x2. Para $A, B \in V$, defina

$$b(A,B) = det(A+B) - det(A) - det(B).$$

   Pruebe que b es una forma bilineal simetrica no degenerada. Encuentre la matriz que representa a b en la base ”canonica” de V. Encuentre una base ortogonal.

7. Apoyese en el producto punto usual en $\mathbb{R}^n$ para probar la desigualdad de Swartz:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_1 b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + (\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

8. En $\mathbb{C}^2$ defina $b(X,Y) = x_1y_1 + i(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2)$, donde $X = (x_1, x_2)$ e $Y(y_1, y_2)$. Es b una forma Hermitiana?

9. Pruebe que si B es una matriz Hermitiana (es decir, la forma $(x,y) \mapsto x^* By$ es Hermitiana), entonces $det(B)$ es un numero real.

10. Sea A una matriz unitaria. Pruebe que $|det(A)| = 1$

11. Determine en tipo de conica de $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 + 3x_2 + 4 = 0$, de $x_1^2 - 3x_2^2 + 3 = 0$.